ТЕОРЕМА БОНДАРЕВОЙ—ШЕПЛИ*

Н. И. Наумова
nataliai.naumova@mail.ru

Н. А. Соловьёва
vinyo@mail.ru

18 февраля 2016 г.

Аннотация. В теореме Бондаревой—Шепли устанавливается критерий непустоты C-ядра кооперативной игры. В докладе приводится усовершенствованный вариант доказательства этой теоремы, в котором наряду с первой теоремой двойственности из линейного программирования используется лемма о базисном плане.

1°. Кооперативные игры были введены в книге [1]. *Кооперативной игрой* n лиц называется пара (N, v), где $N = \{1, \dots, n\}$ — множество игроков, а v — отображение, которое каждому подмножеству S множества N ставит в соответствие вещественное число $v(S)$. При этом требуется только, чтобы $v(\varnothing) = 0$. Отображение v называется *характеристической функцией.*

Любое непустое подмножество S множества N называется *коалицией.* Число $v(S)$ интерпретируется как сумма, которую могут заработать вместе игроки из коалиции S, если будут действовать скоординированно. При этом $v(N)$ — это сумма, которую заработают все n игроков в случае согласованных действий.

C-ядром игры (N, v) называется множество

$$\begin{aligned} C(N,v) = \Big\{x \in R^n : \sum_{i=1}^{n} x[i] = v(N) \ \text{ и} \\ \sum_{i \in S} x[i] \geqslant v(S) \ \text{ для любого } S \subset N,\ S \neq \varnothing,\ S \neq N\Big\}. \end{aligned} \tag{1}$$

Предполагается, что все игроки вместе создали коалицию («большую фирму»), доход которой определяется величиной $v(N)$. Общий доход распределяется между участниками коалиции в соответствии с вектором x. Если C-ядро непусто, то суммарный доход $v(S)$ любой коалиции не превосходит суммарного

*Семинар по конструктивному негладкому анализу и недифференцируемой оптимизации «CNSA & NDO»: `http://www.apmath.spbu.ru/cnsa/`

дохода участников этой коалиции в рамках большой фирмы. В таком случае игрокам невыгодно уходить из большой коалиции N и создавать какую-либо частную коалицию S.

Непустота C-ядра является важной характеристикой кооперативной игры. При решении задачи о непустоте C-ядра используются результаты теории линейного программирования.

2°. Рассмотрим следующую задачу линейного программирования:

$$\sum_{i=1}^{n} x[i] \to \inf,$$
$$\sum_{i\in S} x[i] \geqslant v(S) \quad \text{при всех } S \subset N,\ S \neq \varnothing,\ S \neq N. \tag{2}$$

Множество планов задачи (2) непусто. Например, вектор x с компонентами $x[i] = \max\{0, \max\limits_{S: i\in S} v(S)\}$ является планом задачи (2). Значение целевой функции задачи (2) ограничено снизу на множестве планов числом $\sum\limits_{i=1}^{n} v(\{i\})$. Следовательно (см., например, [2, с. 14]), задача (2) имеет решение. Обозначим через M_* минимальное значение целевой функции.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *C-ядро $C(N,v)$ кооперативной игры (N,v) непусто тогда и только тогда, когда $v(N) \geqslant M_*$.*

Доказательство. Необходимость. Если $C(N,v) \neq \varnothing$, то любой вектор $x \in C(N,v)$ является планом задачи (2). Значит, $\sum\limits_{i=1}^{n} x[i] \geqslant M_*$. Непосредственно из определения C-ядра следует, что $v(N) \geqslant M_*$.
Достаточность. Предположим, что $v(N) \geqslant M_*$. Возьмём оптимальный план x_* задачи (2). Тогда вектор $x \in \mathbb{R}^n$ с компонентами

$$x[1] = x_*[1] + v(N) - M_*,$$
$$x[j] = x_*[j], \quad j = 2, \ldots, n,$$

принадлежит C-ядру кооперативной игры. □

3°. Перенумеруем все непустые собственные подмножества S множества N в произвольном порядке. Получим последовательность

$$S_{\hat{1}},\ S_{\hat{2}},\ \ldots,\ S_{\hat{m}},$$

где $m = 2^n - 2$. Обозначим $\widehat{M} = \{\hat{1}, \ldots, \hat{m}\}$. Введём матрицу $\chi[N, \widehat{M}]$ с элементами

$$\chi[i,\hat{k}] = \begin{cases} 1, & i \in S_{\hat{k}}, \\ 0, & i \notin S_{\hat{k}}. \end{cases}$$

Для примера рассмотрим случай трёх игроков ($n = 3$). Зафиксируем порядок перебора всех непустых собственных подмножеств множества $N = \{1, 2, 3\}$:

$$S_{\hat{1}} = \{1\}, \quad S_{\hat{2}} = \{2\}, \quad S_{\hat{3}} = \{3\}, \quad S_{\hat{4}} = \{1, 2\}, \quad S_{\hat{5}} = \{1, 3\}, \quad S_{\hat{6}} = \{2, 3\}.$$

Тогда матрица $\chi[N, \widehat{M}]$ будет выглядеть так:

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccccc} \hat{1} & \hat{2} & \hat{3} & \hat{4} & \hat{5} & \hat{6} \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{array}.$$

Введём вектор $v[\widehat{M}]$ с компонентами $v[\hat{k}] = v(S_{\hat{k}})$. Тогда задачу (2) можно переписать в следующем виде:

$$\begin{gathered} \langle \mathbb{1}, x \rangle \to \inf, \\ \chi^T[\widehat{M}, N] \times x[N] \geqslant v[\widehat{M}]. \end{gathered} \tag{3}$$

(Здесь $\mathbb{1}$ — вектор из единиц длины n.) Запишем задачу линейного программирования, двойственную к задаче (3):

$$\begin{gathered} \langle v, \lambda \rangle \to \sup, \\ \chi[N, \widehat{M}] \times \lambda[\widehat{M}] = \mathbb{1}[N], \\ \lambda[\widehat{M}] \geqslant \mathbb{O}[\widehat{M}]. \end{gathered} \tag{4}$$

По первой теореме двойственности [2, с. 32] задача (4) имеет решение и её экстремальное значение равно M_*. Заметим, что множество планов задачи (4) не зависит от характеристической функции v, а определяется только числом игроков.

4°. План задачи (4) называется *сбалансированным покрытием* (термин введён Л. Шепли [3]). *Минимальным сбалансированным покрытием* называется сбалансированное покрытие, носитель которого не содержит строго носителей других сбалансированных покрытий.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. *Вектор λ образует минимальное сбалансированное покрытие тогда и только тогда, когда он является базисным планом задачи* (4).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Н е о б х о д и м о с т ь. Приводимое доказательство необходимости составляет часть доказательства леммы о базисном плане [2, с. 14].

Рассмотрим вектор λ^1, который образует минимальное сбалансированное покрытие, но не является базисным планом. Носитель $\widehat{M}^1_+ \subset \widehat{M}$ плана λ^1 не пуст. Столбцы матрицы ограничений с индексами из $\widehat{M}^1_+$ являются линейно зависимыми, значит, система

$$\chi[N, \widehat{M}^1_+] \times z[\widehat{M}^1_+] = \mathbb{O}[N] \tag{5}$$

имеет ненулевое решение $z_0[\widehat{M}^1_+]$. Положим $z_0[\widehat{M} \setminus \widehat{M}^1_+] = \mathbb{O}[\widehat{M} \setminus \widehat{M}^1_+]$. С учётом однородности системы (5) можно считать, что у вектора z_0 есть положительные компоненты. Зададим луч $\lambda(t) = \lambda^1 - tz_0$, $t > 0$. При любом вещественном t верно равенство

$$\chi\,\lambda(t) = \chi\,\lambda^1 - t\,\chi z_0 = \mathbb{1}.$$

Вектор $\lambda(t)$ будет планом задачи (4), если $\lambda^1 - tz_0 \geqslant \mathbb{O}$. Заметим, что $\lambda^1[\hat{k}] - tz_0[\hat{k}] = 0$ при $\hat{k} \in \widehat{M} \setminus \widehat{M}^1_+$ и всех вещественных t. Кроме того, при $\hat{k} \in \widehat{M}^1_+$ таких, что $z_0[\hat{k}] \leqslant 0$, неравенство $\lambda^1[\hat{k}] - tz_0[\hat{k}] > 0$ верно при всех положительных t. Теперь рассмотрим $\hat{k} \in \widehat{M}^1_+$ такие, что $z_0[\hat{k}] > 0$. Обозначим

$$t_0 = \min\Big\{ \tfrac{\lambda^1[\hat{k}]}{z_0[\hat{k}]} \;\Big|\; \hat{k} \in \widehat{M}^1_+ :\; z_0[\hat{k}] > 0 \Big\}.$$

Пусть $\hat{l}$ — индекс, на котором достигается минимум. Вектор $\lambda^2 = \lambda(t_0)$ — план задачи (4), при этом $\lambda^2[\hat{l}] = 0$. Таким образом, носитель плана λ^2 строго содержится в носителе плана λ^1, так что λ^1 не является минимальным сбалансированным покрытием.

Достаточность. Пусть λ^1 — базисный план задачи (4) с носителем $\widehat{M}^1_+$, который не будет минимальным сбалансированным покрытием. Тогда существует сбалансированное покрытие λ^2 с носителем $\widehat{M}^2_+$, такое, что $\widehat{M}^2_+ \subsetneqq \widehat{M}^1_+$. Так как для планов λ^1 и λ^2 верны равенства $\chi[N, \widehat{M}] \times \lambda^1[\widehat{M}] = \mathbb{1}[N]$, $\chi[N, \widehat{M}] \times \lambda^2[\widehat{M}] = \mathbb{1}[N]$, то

$$\chi[N, \widehat{M}] \times \lambda^1[\widehat{M}] - \chi[N, \widehat{M}] \times \lambda^2[\widehat{M}] = \mathbb{O}[N].$$

Это равенство можно переписать так:

$$\sum_{\hat{k} \in \widehat{M}^1_+} \chi[N, \hat{k}] \times \lambda^1[\hat{k}] - \sum_{\hat{k} \in \widehat{M}^2_+} \chi[N, \hat{k}] \times \lambda^2[\hat{k}] = \mathbb{O}[N]$$

или

$$\sum_{\hat{k} \in \widehat{M}^1_+} \chi[N, \hat{k}] \big(\lambda^1[\hat{k}] - \lambda^2[\hat{k}] \big) = \mathbb{O}[N].$$

При всех $\hat{k} \in \widehat{M}^1_+ \setminus \widehat{M}^2_+$ верно $\lambda^1[\hat{k}] - \lambda^2[\hat{k}] \neq 0$. Значит, столбцы $\chi[\,\cdot\,, \hat{k}]$ при $\hat{k} \in \widehat{M}^1_+$ линейно зависимы и план λ^1 не является базисным. $\square$

5°. Напомним формулировку леммы о базисном плане [2, с. 14]. Рассмотрим задачу линейного программирования в канонической форме:

$$\begin{aligned} \langle c, x\rangle &\to \inf, \\ Ax &= b, \\ x &\geqslant \mathbb{O}. \end{aligned} \tag{6}$$

Предположим, что множество планов этой задачи непусто и целевая функция ограничена снизу на нём. Справедлива

ЛЕММА (о базисном плане)**.** *Пусть $b \neq \mathbb{O}$. Тогда любому плану задачи* (6) *можно сопоставить базисный план с меньшим либо равным значением целевой функции.*

Базисных планов конечное число, так как различным базисным планам соответствуют различные носители [2, с. 15]. Таким образом, для решения задачи достаточно перебрать все базисные планы и выбрать те, на которых достигается минимум целевой функции.

Из леммы о базисном плане, предложений 1 и 2 непосредственно следует

ТЕОРЕМА БОНДАРЕВОЙ—ШЕПЛИ. *C-ядро $C(N, v)$ кооперативной игры (N, v) непусто тогда и только тогда, когда*

$$v(N) \geqslant \max\Big\{ \sum_{\hat{k}\in\widehat{M}} \lambda[\hat{k}]\, v[\hat{k}] \;\Big|\; \lambda[\widehat{M}] \text{ — \textit{минимальное сбалансированное покрытие}} \Big\}.$$

Напомним, что $v[\hat{k}] = v(S_{\hat{k}})$, где $S_{\hat{k}}$ — непустое собственное подмножество множества N, имеющее номер $\hat{k}$ в произвольном заранее зафиксированном порядке.

Данный результат был опубликован О. Н. Бондаревой в 1963 году [4] и в 1967 году получен независимо Л. Шепли [3], который не использовал аппарат линейного программирования. Позднее эта теорема стала называться теоремой Бондаревой—Шепли.

6°. В качестве примера рассмотрим кооперативную игру трёх лиц. Зафиксируем тот же порядок непустых собственных подмножеств множества $N =$

$= \{1, 2, 3\}$, что и в п. 3°. Задача (2) принимает вид

$$\begin{aligned} x[1] + x[2] + x[3] &\to \inf, \\ x[1] \qquad\qquad\qquad &\geqslant v[\hat{1}], \\ x[2] \qquad\quad &\geqslant v[\hat{2}], \\ x[3] &\geqslant v[\hat{3}], \\ x[1] + x[2] \qquad\quad &\geqslant v[\hat{4}], \\ x[1] \qquad + x[3] &\geqslant v[\hat{5}], \\ x[2] + x[3] &\geqslant v[\hat{6}]. \end{aligned}$$

Перейдём к двойственной задаче:

$$\begin{gathered} v[\hat{1}]\,\lambda[\hat{1}] + v[\hat{2}]\,\lambda[\hat{2}] + v[\hat{3}]\,\lambda[\hat{3}] + v[\hat{4}]\,\lambda[\hat{4}] + v[\hat{5}]\,\lambda[\hat{5}] + v[\hat{6}]\,\lambda[\hat{6}] \to \sup, \\ \lambda[\hat{1}] \qquad + \lambda[\hat{4}] + \lambda[\hat{5}] \qquad = 1, \\ \lambda[\hat{2}] \quad + \lambda[\hat{4}] \qquad + \lambda[\hat{6}] = 1, \\ \lambda[\hat{3}] \qquad + \lambda[\hat{5}] + \lambda[\hat{6}] = 1, \\ \lambda[\hat{k}] \geqslant 0, \quad \hat{k} = \hat{1}, \ldots, \hat{6}. \end{gathered} \tag{7}$$

Нетрудно проверить, что базисными планами задачи (7) являются следующие векторы:

1. λ^1, где $\lambda^1[\hat{k}] = \begin{cases} 1 & \text{при } \hat{k} = \hat{1}, \hat{2}, \hat{3}, \\ 0 & \text{при } \hat{k} = \hat{4}, \hat{5}, \hat{6}; \end{cases}$

2. λ^2, где $\lambda^2[\hat{k}] = \begin{cases} 1 & \text{при } \hat{k} = \hat{1}, \hat{6}, \\ 0 & \text{при } \hat{k} = \hat{2}, \hat{3}, \hat{4}, \hat{5}; \end{cases}$

3. λ^3, где $\lambda^3[\hat{k}] = \begin{cases} 1 & \text{при } \hat{k} = \hat{2}, \hat{5}, \\ 0 & \text{при } \hat{k} = \hat{1}, \hat{3}, \hat{4}, \hat{6}; \end{cases}$

4. λ^4, где $\lambda^4[\hat{k}] = \begin{cases} 1 & \text{при } \hat{k} = \hat{3}, \hat{4}, \\ 0 & \text{при } \hat{k} = \hat{1}, \hat{2}, \hat{5}, \hat{6}; \end{cases}$

5. λ^5, где $\lambda^5[\hat{k}] = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{при } \hat{k} = \hat{4}, \hat{5}, \hat{6}, \\ 0 & \text{при } \hat{k} = \hat{1}, \hat{2}, \hat{3}. \end{cases}$

Полный перебор носителей показывает, что других базисных планов у задачи (7) нет.

Теорема Бондаревой—Шепли утверждает, что для игры трёх лиц C-ядро непусто тогда и только тогда, когда

$$v(N) \geqslant \max\Big\{v[\hat{1}]+v[\hat{2}]+v[\hat{3}];\ v[\hat{1}]+v[\hat{6}];\ v[\hat{2}]+v[\hat{5}];\ v[\hat{3}]+v[\hat{4}];\ \tfrac{1}{2}\big(v[\hat{4}]+v[\hat{5}]+v[\hat{6}]\big)\Big\}.$$

7°. Алгоритм перечисления всех минимальных сбалансированных покрытий для кооперативных игр с произвольным числом игроков был предложен Б. Пелегом в работе [5].

ЛИТЕРАТУРА

1. Нейман Дж., Моргенштерн О. *Теория игр и экономическое поведение.* М.: Наука, 1970. 707 с.
2. Гавурин М. К., Малозёмов В. Н. *Экстремальные задачи с линейными ограничениями*. Л.: Изд-во Ленинградского ун-та, 1984. 176 с.
3. Shapley L. S. *On balanced sets and cores* // Naval Research Logistics Quarterly. 1967. V. 14. P. 453–460.
4. Бондарева О. Н. *Некоторые применения методов линейного программирования к теории кооперативных игр* // Проблемы кибернетики. 1963. Выпуск 10. С. 119–139.
5. Peleg B. *An inductive method for constructing minimal balanced collections of finite sets* // Naval Research Logistics Quarterly. 1965. V. 12. P. 155–162.