ЦИКЛИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ И ЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ*

В. Н. Малозёмов
v.malozemov@spbu.ru

27 августа 2015 г.

1°. Начнём с простого примера. Возьмём циклическую функцию

$$G_n(x) = \frac{x_1^2}{x_1+x_2} + \frac{x_2^2}{x_2+x_3} + \cdots + \frac{x_{n-1}^2}{x_{n-1}+x_n} + \frac{x_n^2}{x_n+x_1}$$

и рассмотрим экстремальную задачу

$$\begin{gathered} \textit{минимизировать } G_n(x) \textit{ при ограничениях :} \qquad (1) \\ \textit{все компоненты вектора } x=(x_1,\dots,x_n) \textit{ положительны и} \\ \sum_{k=1}^{n} x_k = a, \quad a>0. \end{gathered}$$

Покажем, что задача (1) при $n \geqslant 2$ имеет единственное решение

$$x^* = (\tfrac{a}{n}, \tfrac{a}{n}, \dots, \tfrac{a}{n}).$$

Нам потребуется вспомогательное утверждение.

ЛЕММА 1. *Для вещественных чисел $c_1,\dots,c_n$ и положительных $b_1,\dots,b_n$ справедливо неравенство*

$$\frac{c_1^2}{b_1} + \cdots + \frac{c_n^2}{b_n} \geqslant \frac{(c_1+\cdots+c_n)^2}{b_1+\cdots+b_n}. \qquad (2)$$

Неравенство выполняется как равенство только тогда, когда $c_k = \lambda b_k$, $k \in 1:n$, при некотором вещественном λ.

---

*Семинар по конструктивному негладкому анализу и недифференцируемой оптимизации «CNSA & NDO»: `http://www.apmath.spbu.ru/cnsa/`

Доказательство. По неравенству Коши-Буняковского

$$(c_1 + \cdots + c_n)^2 = \Big(\sqrt{b_1}\frac{c_1}{\sqrt{b_1}} + \cdots + \sqrt{b_n}\frac{c_n}{\sqrt{b_n}}\Big)^2 \leqslant$$
$$\leqslant (b_1 + \cdots + b_n)\Big(\frac{c_1^2}{b_1} + \cdots + \frac{c_n^2}{b_n}\Big).$$

Отсюда очевидным образом следует (2).

Неравенство Коши-Буняковского выполняется как равенство только тогда, когда $\frac{c_k}{\sqrt{b_k}} = \lambda\sqrt{b_k}$, то есть когда $c_k = \lambda b_k$ при всех $k \in 1 : n$. $\square$

Теперь легко получить решение задачи (1). Согласно лемме для любого плана $x = (x_1, \ldots, x_n)$ имеем

$$G_n(x) \geqslant \frac{(x_1 + \cdots + x_n)^2}{2(x_1 + \cdots + x_n)} = \frac{a}{2}.$$

Неравенство выполняется как равенство (а в этом случае достигается минимальное значение целевой функции) только тогда, когда $x_k = \lambda(x_k + x_{k+1})$, $k \in 1 : n$, где $x_{n+1} = x_1$. Сложив эти равенства, получим $a = 2\lambda a$, так что $\lambda = \frac{1}{2}$ и $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = \frac{a}{n}$.

2°. Возьмём более сложную циклическую функцию

$$F_n(x) = \frac{x_1}{x_2 + x_3} + \frac{x_2}{x_3 + x_4} + \cdots + \frac{x_{n-1}}{x_n + x_1} + \frac{x_n}{x_1 + x_2}.$$

У неё каждое слагаемое зависит от трёх соседних переменных.

Рассмотрим экстремальную задачу: *минимизировать* $F_n(x)$ *при тех же ограничениях, что и в задаче* (1). Множество планов обозначим через Ω_n.

Начнём с того, что укажем решение данной задачи при $n \in 3 : 6$.

3°. Пусть $n = 3$. Нам потребуется неравенство

$$\frac{x_1}{x_2 + x_3} + \frac{x_2}{x_3 + x_1} + \frac{x_3}{x_1 + x_2} \geqslant \frac{3}{2}, \tag{3}$$

справедливое при всех положительных x_1, x_2, x_3. Проверим его.

У каждой дроби в числителе добавим и вычтем знаменатель. Получим

$$\frac{x_1}{x_2 + x_3} + \frac{x_2}{x_3 + x_1} + \frac{x_3}{x_1 + x_2} = (x_1 + x_2 + x_3)\Big(\frac{1}{x_2 + x_3} + \frac{1}{x_3 + x_1} + \frac{1}{x_1 + x_2}\Big) - 3. \tag{4}$$

Теперь воспользуемся неравенством между средним гармоническим и средним арифметическим, которое запишем в виде

$$\frac{1}{b_1} + \frac{1}{b_2} + \frac{1}{b_3} \geqslant \frac{9}{b_1 + b_2 + b_3}.$$

Подставив это в (4), придём к (3).

Неравенство (3) выполняется как равенство только тогда, когда $x_2 + x_3 = x_3 + x_1 = x_1 + x_2$, то есть когда $x_1 = x_2 = x_3$. Отсюда следует, что минимум функции $F_3(x)$ на Ω_3 достигается в единственной точке $x^* = (\frac{a}{3}, \frac{a}{3}, \frac{a}{3})$ и равен $\frac{3}{2}$.

4°. Пусть $n = 4$. Докажем, что при всех положительных x_1, x_2, x_3, x_4 справедливо неравенство

$$\frac{x_1}{x_2 + x_3} + \frac{x_2}{x_3 + x_4} + \frac{x_3}{x_4 + x_1} + \frac{x_4}{x_1 + x_2} \geqslant 2. \tag{5}$$

Оно выполняется как равенство только тогда, когда $x_1 = x_3$ и $x_2 = x_4$.

Действительно, по неравенству между средним геометрическим и средним арифметическим имеем

$$\begin{aligned}
\frac{x_1}{x_2 + x_3} + \frac{x_3}{x_4 + x_1} &= \frac{x_1(x_4 + x_1) + x_3(x_2 + x_3)}{(x_2 + x_3)(x_4 + x_1)} \geqslant \\
&\geqslant \frac{4(x_1^2 + x_3^2 + x_1 x_4 + x_2 x_3)}{(x_1 + x_2 + x_3 + x_4)^2}, \\
\frac{x_2}{x_3 + x_4} + \frac{x_4}{x_1 + x_2} &= \frac{x_2(x_1 + x_2) + x_4(x_3 + x_4)}{(x_3 + x_4)(x_1 + x_2)} \geqslant \\
&\geqslant \frac{4(x_2^2 + x_4^2 + x_1 x_2 + x_3 x_4)}{(x_1 + x_2 + x_3 + x_4)^2}.
\end{aligned}$$

Сложив эти неравенства, получим

$$F_4(x) \geqslant \frac{2\big[(x_1 + x_2)^2 + (x_2 + x_3)^2 + (x_3 + x_4)^2 + (x_4 + x_1)^2\big]}{(x_1 + x_2 + x_3 + x_4)^2}.$$

Теперь оценим числитель с помощью неравенства между средним квадратичным и средним арифметическим, которое запишем в виде

$$b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 + b_4^2 \geqslant \tfrac{1}{4}(b_1 + b_2 + b_3 + b_4)^2.$$

Придём к (5).

Неравенство (5) выполняется как равенство только тогда, когда все промежуточные неравенства выполняются как равенства, то есть когда

$$x_2 + x_3 = x_4 + x_1, \quad x_3 + x_4 = x_1 + x_2,$$
$$x_1 + x_2 = x_2 + x_3 = x_3 + x_4 = x_4 + x_1.$$

Это возможно лишь в случае $x_1 = x_3$, $x_2 = x_4$, то есть при $x = (x_1, x_2, x_1, x_2)$. Точки такого вида, принадлежащие Ω_4, должны удовлетворять условиям

$$x_1 + x_2 = \tfrac{a}{2}, \quad x_1 > 0,\ x_2 > 0. \tag{6}$$

Таким образом, минимум функции $F_4(x)$ на Ω_4 равен 2 и достигается на векторах вида $x = (x_1, x_2, x_1, x_2)$, удовлетворяющих условиям (6).

Отметим, что функция $F_4(x)$ определена и в предельных точках $(0, \frac{a}{2}, 0, \frac{a}{2})$ и $(\frac{a}{2}, 0, \frac{a}{2}, 0)$ и принимает на них значение 2.

5°. Анализ случаев $n = 5$ и $n = 6$ основан на другом подходе. Будем минимизировать функцию $F_n(x)$ по всем векторам $x = (x_1, \dots, x_n)$ с положительными компонентами, удовлетворяющими условию

$$\sum_{k=1}^{n} x_k = n. \tag{7}$$

Так как $F_n(\lambda x) = F_n(x)$ при положительных λ, то решение $\hat{x}$ такой задачи связано с решением x^* задачи минимизации $F_n(x)$ на Ω_n соотношением $x^* = \frac{a}{n}\hat{x}$.

Положим $x_k = 1 + 2h_k$, $k \in 1 : n$, где $h_k > -\frac{1}{2}$. Согласно (7)

$$\sum_{k=1}^{n} h_k = 0. \tag{8}$$

Имеем

$$F_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1 + 2h_k}{2 + 2(h_{k+1} + h_{k+2})}.$$

Здесь $h_{n+1} = h_1$, $h_{n+2} = h_2$.

Воспользуемся неравенством

$$\frac{1}{1+u} \geqslant 1 - u \quad \text{при} \quad u > -1,$$

которое выполняется как равенство только при $u = 0$. Согласно (8) получим

$$F_n(x) \geqslant \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} (1 + 2h_k)\big(1 - (h_{k+1} + h_{k+2})\big) =$$
$$= \frac{n}{2} - \sum_{k=1}^{n} h_k (h_{k+1} + h_{k+2}).$$

Обозначим

$$Q_n(h) = \sum_{k=1}^{n} h_k (h_{k+1} + h_{k+2}).$$

Тогда

$$F_n(x) \geqslant \frac{n}{2} - Q_n(h). \tag{9}$$

При $n = 5$ имеем $h_6 = h_1$, $h_7 = h_2$ и

$$
\begin{aligned}
Q_5(h) = h_1h_2 + h_1h_3 + h_4h_1 + h_5h_1 + &\\
+ h_2h_3 + h_2h_4 + h_5h_2 + &\\
+ h_3h_4 + h_3h_5 + &\\
+ h_4h_5 = &\\
= \sum_{1\leqslant i<j\leqslant 5} h_ih_j = \frac{1}{2}\Big(\sum_{k=1}^{5} h_k\Big)^2 - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{5} h_k^2 = -\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{5} h_k^2.
\end{aligned}
$$

Значит,

$$
F_5(x) \geqslant \frac{5}{2} + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{5} h_k^2 \geqslant \frac{5}{2}.
$$

Равенство $F_5(x) = \frac{5}{2}$ выполняется только тогда, когда все h_k равны нулю, то есть на векторе $\hat{x} = (1, 1, 1, 1, 1)$.

Приходим к следующему выводу: единственным решением задачи минимизации функции $F_5(x)$ на Ω_5 является вектор $x^* = \frac{a}{5}\hat{x}$.

При $n = 6$ имеем $h_7 = h_1$, $h_8 = h_2$ и

$$
\begin{aligned}
Q_6(h) = h_1h_2 + h_1h_3 + \qquad + h_5h_1 + h_6h_1 + &\\
+ h_2h_3 + h_2h_4 + \qquad + h_6h_2 + &\\
+ h_3h_4 + h_3h_5 + &\\
+ h_4h_5 + h_4h_6 + &\\
+ h_5h_6 = &\\
= \sum_{1\leqslant i<j\leqslant 6} h_ih_j - h_1h_4 - h_2h_5 - h_3h_6 = &\\
= \frac{1}{2}\Big(\sum_{k=1}^{6} h_k\Big)^2 - \frac{1}{2}\big[(h_1+h_4)^2 + (h_2+h_5)^2 + (h_3+h_6)^2\big].
\end{aligned}
$$

Согласно (8) и (9)

$$
F_6(x) \geqslant 3 + \frac{1}{2}\big[(h_1+h_4)^2 + (h_2+h_5)^2 + (h_3+h_6)^2\big] \geqslant 3.
$$

Равенство $F_6(x) = 3$ выполняется только тогда, когда

$$
\begin{gathered}
h_2 + h_3 = 0,\ h_3 + h_4 = 0,\ h_4 + h_5 = 0,\ h_5 + h_6 = 0,\ h_6 + h_1 = 0,\ h_1 + h_2 = 0;\\
h_1 + h_4 = 0,\ h_2 + h_5 = 0,\ h_3 + h_6 = 0,
\end{gathered}
$$

то есть когда $h_2 = h_4 = h_6$, $h_1 = h_3 = h_5$, $h_1 + h_2 = 0$. Это соответствует представлению

$$\hat{x}_1 = 1 + h,\ \hat{x}_2 = 1 - h,\ \hat{x}_3 = 1 + h,\ \hat{x}_4 = 1 - h,\ \hat{x}_5 = 1 + h,\ \hat{x}_6 = 1 - h, \tag{10}$$

где $|h| < 1$.

Приходим к следующему выводу: минимальное значение функции $F_6(x)$ на Ω_6 равно 3 и достигается на векторах $x^* = \frac{a}{6}\hat{x}$, где компоненты вектора $\hat{x}$ имеют вид (10).

Отметим, что функция $F_6(x)$ определена и в предельных точках $\hat{x}$, соответствующих $h = 1$ и $h = -1$, и принимает на них значение 3.

6°. Решение задачи о минимизации функции $F_n(x)$ на множестве Ω_n при $n \in 3 : 6$ было получено на основании того факта, что при указанных n и положительных $x_1, \ldots, x_n$ выполняется неравенство

$$F_n(x) \geqslant \frac{n}{2}.$$

В 1954 г. Г. Шапиро доказал это неравенство при $n = 3$ и $n = 4$ и выдвинул гипотезу, что неравенство справедливо и при всех $n > 4$ [1]. Гипотеза Шапиро вызвала широкий интерес. Коллективными усилиями было установлено, что неравенство Шапиро выполняется при $n \leqslant 13$ и нечётных n от 15 до 23. При остальных n неравенство нарушается (см., например [2]).

Возникает вопрос: в случае, когда неравенство Шапиро нарушается, насколько минимум $F_n(x)$ на Ω_n отличается от $\frac{n}{2}$. Ответ на этот вопрос содержится в замечательной теореме В. Г. Дринфельда [3].

ТЕОРЕМА. *При $n \geqslant 7$ для всех векторов x с положительными компонентами справедлива оценка*

$$F_n(x) > c\,\frac{n}{2},$$

где $c = 0.989$.

Для доказательства нам потребуется вспомогательное предложение.

ЛЕММА 2. *Пусть $u_1 \geqslant u_2 \geqslant \ldots \geqslant u_n$ — упорядоченная по невозрастанию последовательность $x_1, x_2, \ldots, x_n$ и $v_1 \leqslant v_2 \leqslant \ldots \leqslant v_n$ — упорядоченная по неубыванию последовательность $y_1, y_2, \ldots, y_n$. Тогда*

$$\sum_{k=1}^{n} x_k y_k \geqslant \sum_{k=1}^{n} u_k v_k. \tag{11}$$

Доказательство. За счёт перестановки слагаемых неравенство (11) можно переписать в виде

$$\sum_{k=1}^{n} u_k y_k^0 \geqslant \sum_{k=1}^{n} u_k v_k,$$

где $y_1^0, \dots, y_n^0$ — некоторая перестановка чисел $y_1, \dots, y_n$. Если $v_1 = y_1^0$, то

$$\sum_{k=1}^{n} u_k y_k^0 = u_1 v_1 + \sum_{k=2}^{n} u_k y_k^0. \tag{12}$$

Допустим, что $v_1 = y_{k_0}^0$ при $k_0 > 1$. Так как

$$(u_1 - u_{k_0})(y_1^0 - v_1) \geqslant 0$$

или

$$u_1 y_1^0 + u_{k_0} y_{k_0}^0 \geqslant u_1 v_1 + u_{k_0} y_1^0,$$

то

$$\sum_{k=1}^{n} u_k y_k^0 \geqslant u_1 v_1 + \sum_{k=2}^{n} u_k y_k^1, \tag{13}$$

где $y_{k_0}^1 = y_1^0$ и $y_k^1 = y_k^0$ при $k \neq k_0$. При этом

$$\min_{k \in 2:n} y_k^1 = v_2.$$

Очевидно, что и в (12)

$$\min_{k \in 2:n} y_k^0 = v_2.$$

С помощью таких же соображений в правых частях неравенств (12) и (13) можно выделить слагаемое $u_2 v_2$ и т. д. В результате придём к неравенству (11). $\square$

Доказательство теоремы. Обозначим $\xi_k = x_{k+1}/x_k$, $k \in 1:n$. Тогда

$$F_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{x_k}{x_{k+1} + x_{k+2}} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\xi_k (1 + \xi_{k+1})}.$$

Здесь $\xi_{n+1} = \xi_1$, так как по определению $x_{n+1} = x_1$, $x_{n+2} = x_2$. Отметим также, что $\xi_1 \xi_2 \cdots \xi_n = 1$.

Упорядочим числа $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ по неубыванию. Получим последовательность $0 < y_1 \leqslant y_2 \leqslant \dots \leqslant y_n$. По лемме 2

$$F_n(x) \geqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{y_k (1 + y_{n-k+1})}.$$

Положим

$$r_k = \frac{1}{y_k(1+y_{n-k+1})} + \frac{1}{y_{n-k+1}(1+y_k)}.$$

Очевидно, что

$$F_n(x) \geqslant \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} r_k. \tag{14}$$

Обозначим $\eta_k = y_k y_{n-k+1}$. Имеем $\eta_1\eta_2\ldots\eta_n = 1$ и

$$r_k = \frac{1}{\eta_k}\Big(1 + \frac{\eta_k - 1}{(1+y_k)(1+y_{n-k+1})}\Big).$$

Так как

$$(1+y_k)(1+y_{n-k+1}) = 1 + \eta_k + 2\frac{y_k + y_{n-k+1}}{2} \geqslant (1+\sqrt{\eta_k})^2,$$

то

$$r_k \geqslant \begin{cases} 1/\eta_k \quad \text{при} \quad \eta_k \geqslant 1, \\ \frac{1}{\eta_k}\Big(1 + \frac{\sqrt{\eta_k}-1}{\sqrt{\eta_k}+1}\Big) = \frac{2}{\eta_k+\sqrt{\eta_k}} \quad \text{при} \quad \eta_k < 1. \end{cases}$$

Пусть $z_k = \ln\eta_k$. Из последнего неравенства следует, что

$$r_k \geqslant \min\big\{e^{-z_k},\ 2(e^{z_k} + e^{z_k/2})^{-1}\big\}. \tag{15}$$

При этом

$$z_1 + z_2 + \cdots + z_n = \ln(\eta_1\eta_2\ldots\eta_n) = 0. \tag{16}$$

Введём функции $f(z) = e^{-z}$, $g(z) = 2(e^z + e^{z/2})^{-1}$,

$$\psi(z) = \min\big\{f(z), g(z)\big\}.$$

На основании (14) и (15) получаем

$$\frac{2}{n}\,F_n(x) \geqslant \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\psi(z_k). \tag{17}$$

Теперь мы хотим воспользоваться неравенством Йенсена. Для этого построим выпуклую огибающую функции $\psi(z)$ (см. рис.).

Функции $f(z)$ и $g(z)$ обладают следующими свойствами: они строго выпуклые, принимают одинаковое значение при $z=0$, $f(0)=g(0)=1$, и удовлетворяют неравенствам

$$f(z) > g(z) \text{ при } z < 0 \quad \text{и} \quad f(z) < g(z) \text{ при } z > 0.$$

Ясно, что построение выпуклой огибающей функции $\psi(z)$ (обозначим её $\tilde{\psi}(z)$) сводится к нахождению общей касательной функций $f(z)$ и $g(z)$ между точками касания.

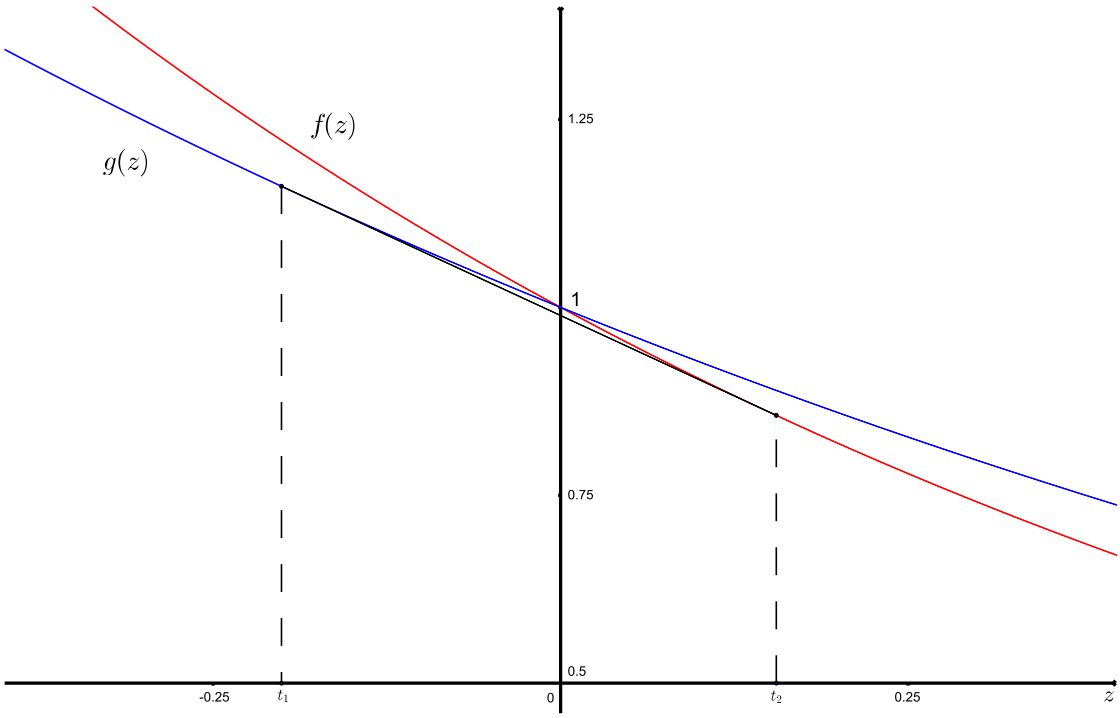

Рис. Выпуклая огибающая функции $\psi(z)$

Абсциссы точек касания обозначим $z = t_1$ и $z = t_2$, $t_1 < t_2$. Запишем систему уравнений относительно t_1 и t_2:

$$\begin{cases} g'(t_1) = f'(t_2), \\ f'(t_2)(t_1 - t_2) + f(t_2) = g(t_1). \end{cases}$$

Из первого уравнения следует, что

$$\frac{2e^{t_1} + e^{t_1/2}}{(e^{t_1} + e^{t_1/2})^2} = e^{-t_2},$$

так что

$$t_2 = -\ln\Big(\frac{2e^{t_1} + e^{t_1/2}}{(e^{t_1} + e^{t_1/2})^2}\Big).$$

Второе уравнение преобразуется к виду

$$\frac{2e^{t_1} + e^{t_1/2}}{e^{t_1} + e^{t_1/2}} \left(t_1 + \ln\Big(\frac{2e^{t_1} + e^{t_1/2}}{(e^{t_1} + e^{t_1/2})^2}\Big) - 1 \right) + 2 = 0.$$

Решение последнего уравнения находим численно:

$$t_1 = -0.200811\ldots$$

При этом $t_2 = 0.155195\ldots$ Отметим, что

$$\tilde{\psi}(0) = -f'(t_2)t_2 + f(t_2) = 0.989134\ldots$$

Вернёмся к формуле (17). Принимая во внимание неравенство $\psi(z) \geqslant \tilde{\psi}(z)$, выпуклость $\tilde{\psi}(z)$, неравенство Йенсена и равенство (16), получаем

$$\frac{2}{n}\ F_n(x) \geqslant \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\tilde{\psi}(z_k) \geqslant \tilde{\psi}\Big(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} z_k\Big) = \\ = \tilde{\psi}(0) > 0.989,$$

что равносильно утверждению теоремы. □

7°. Приношу благодарность Г. Ш. Тамасяну и Е. К. Чернэуцану за помощь при подготовке данного доклада.

ЛИТЕРАТУРА

1. Shapiro H. S. *Problem 4603* // Amer. Math. Monthly. 1954. Vol. 61. P. 571.

2. Храбров А. *Неравенство Шапиро.* (`http://olympiads.mccme.ru/lktg/2010/5/5-1ru.pdf`)

3. Дринфельд В. Г. *Об одном циклическом неравенстве* // Матем. заметки. 1971. Том. 9. Вып. 2. С. 113–119.