

ЛЕММА ГИББСА И ЕЁ ПРИЛОЖЕНИЯ*

В. Н. Малозёмов
v.malozemov@spbu.ru

Г. Ш. Тамасян
g.tamasyan@spbu.ru

10 октября 2017 г.

Данный доклад пополняет серию докладов по элементарным методам в экстремальных задачах.

1°. Рассмотрим сепарабельную экстремальную задачу

$$\begin{aligned} F(x) &:= \sum_{i=1}^n f_i(x_i) \longrightarrow \max \\ \sum_{i=1}^n x_i &= X; \quad x_i \geq 0 \quad \forall i \in 1 : n. \end{aligned} \tag{1}$$

Здесь все f_i — функции одной переменной, дифференцируемые на отрезке $[0, X]$. Очевидно, что задача (1) имеет решение.

ЛЕММА ГИББСА. *Для того чтобы план $x^* = (x_1^*, \dots, x_n^*)$ задачи (1) был оптимальным, необходимо, а в случае вогнутости всех функций f_i на $[0, X]$ и достаточно, чтобы нашлось число λ , такое, что*

$$f'_i(x_i^*) = \lambda, \quad \text{если } x_i^* > 0, \tag{2}$$

$$f'_i(x_i^*) \leq \lambda, \quad \text{если } x_i^* = 0. \tag{3}$$

Доказательство. Необходимость. Пусть $x_i^* > 0$. Возьмём $j \neq i$ и введём функцию

$$p(\varepsilon) = f_i(x_i^* - \varepsilon) + f_j(x_j^* + \varepsilon) + \sum_{k \notin \{i, j\}} f_k(x_k^*), \quad \varepsilon \in [0, x_i^*].$$

Эта функция достигает максимального значения при $\varepsilon = 0$. Значит, $p'(0) \leq 0$, что равносильно неравенству

$$f'_j(x_j^*) \leq f'_i(x_i^*). \tag{4}$$

*Семинар по конструктивному негладкому анализу и недифференцируемой оптимизации «CNSA & NDO»: <http://www.apmath.spbu.ru/cnsa/>

При $x_j^* > 0$ справедливо и обратное неравенство. Следовательно, для всех $i \in 1 : n$, при которых $x_i^* > 0$, производные $f'_i(x_i^*)$ имеют одинаковое значение. Обозначив его λ , придём к равенству (2).

При $x_j^* = 0$ неравенство (4) принимает вид $f'_j(x_j^*) \leq \lambda$. Поменяв здесь индекс j на i , получим неравенство (3).

Достаточность. Прежде всего отметим, что из (2) следует равенство

$$\sum_{i=1}^n f'_i(x_i^*)x_i^* = \sum_{i:x_i^*>0} f'_i(x_i^*)x_i^* = \lambda X. \quad (5)$$

Теперь воспользуемся вогнутостью функций f_i . Для любого плана x в силу условий (2), (3) и (5) имеем

$$\begin{aligned} F(x) - F(x^*) &= \sum_{i=1}^n [f_i(x_i) - f_i(x_i^*)] \leq \sum_{i=1}^n f'_i(x_i^*)(x_i - x_i^*) = \\ &= \sum_{i=1}^n f'_i(x_i^*)x_i - \lambda X \leq 0. \end{aligned}$$

Значит, x^* является решением задачи (1).

Лемма доказана. \square

2°. Замечательное доказательство необходимости в лемме Гиббса мы заимствовали из старой книги [1, с. 21-24]. Там же приводится и рассматриваемый ниже пример. Однако при анализе этого примера мы продвинулись существенно дальше — вплоть до конечного алгоритма его решения.

ПРИМЕР. Рассмотрим экстремальную задачу вида (1):

$$\begin{aligned} F(x) &:= \sum_{i=1}^n a_i(1 - e^{-b_i x_i}) \longrightarrow \max \\ \sum_{i=1}^n x_i &= X; \quad x_i \geq 0 \quad \forall i \in 1 : n. \end{aligned} \quad (6)$$

Здесь a_i, b_i, X — положительные параметры, функции

$$f_i(x_i) = a_i(1 - e^{-b_i x_i})$$

строго вогнуты на \mathbb{R} .

Запишем критерий оптимальности для плана x :

$$a_i b_i e^{-b_i x_i} = \lambda, \quad \text{если } x_i > 0; \quad (7)$$

$$a_i b_i \leq \lambda, \quad \text{если } x_i = 0. \quad (8)$$

Из (7) и (8) следует, что

$$x_i > 0, \quad \text{если } a_i b_i > \lambda, \quad (9)$$

$$x_i = 0, \quad \text{если } a_i b_i \leq \lambda. \quad (10)$$

Действительно, при $a_i b_i \leq \lambda$ необходимо $x_i = 0$, ибо в противном случае в силу (7) получим $a_i b_i > \lambda$, что противоречит исходному условию. При $a_i b_i > \lambda$ будет $x_i > 0$, ибо иначе получим противоречие с (8).

На основании (7) формулу (9) можно переписать так:

$$x_i = \frac{1}{b_i} \ln \frac{a_i b_i}{\lambda}, \quad \text{если } a_i b_i > \lambda. \quad (11)$$

Равенство (7) гарантирует положительность λ , поэтому условия $a_i b_i > \lambda$ и $a_i b_i \leq \lambda$ равносильны тому, что $\frac{a_i b_i}{\lambda} > 1$ и $\frac{a_i b_i}{\lambda} \in (0, 1]$. Данное замечание позволяет объединить формулы (11) и (10) следующим образом:

$$x_i = \frac{1}{b_i} \ln_+ \frac{a_i b_i}{\lambda}, \quad (12)$$

где

$$\ln_+(u) = \begin{cases} \ln(u) & \text{при } u > 1, \\ 0 & \text{при } u \in (0, 1]. \end{cases}$$

График функции $y = \ln_+(u)$ представлен на рис. 1.

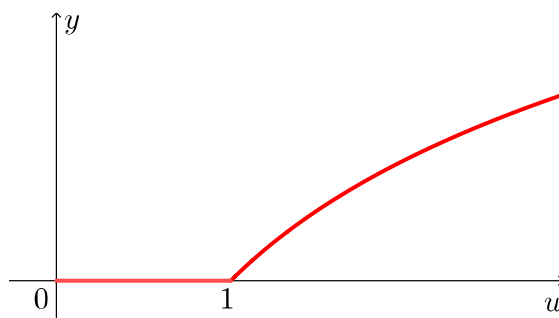


Рис. 1. График функции $y = \ln_+(u)$

Обозначим $c_i = \ln a_i b_i$, $u = \ln \lambda$ и покажем, что

$$x_i = \frac{1}{b_i} (c_i - u)_+, \quad i \in 1 : n. \quad (13)$$

Условия $\frac{a_i b_i}{\lambda} > 1$ и $\frac{a_i b_i}{\lambda} \in (0, 1]$ равносильны соответственно неравенствам $c_i - u > 0$ и $c_i - u \leq 0$. Согласно (12) получаем

$$\begin{aligned} x_i &= \frac{1}{b_i} (c_i - u) && \text{при } c_i - u > 0, \\ x_i &= 0 && \text{при } c_i - u \leq 0, \end{aligned}$$

что равносильно (13). Параметр u найдём из уравнения

$$\varphi(u) := \sum_{i=1}^n \frac{1}{b_i} (c_i - u)_+ = X. \quad (14)$$

На рис. 2 изображён график функции $y = (c - u)_+$.

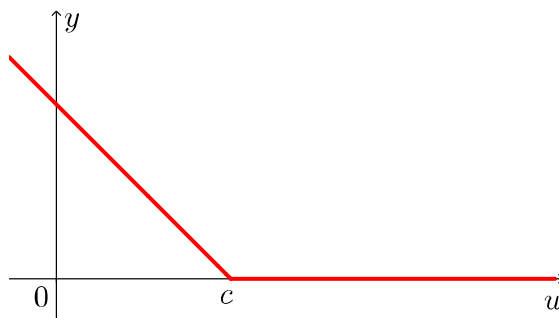


Рис. 2. График функции $y = (c - u)_+$

Таким образом, решение задачи (6) сводится к решению скалярного уравнения (14) и вычислению компонент оптимального плана по формуле (13).

3°. Опишем конечный алгоритм решения уравнения (14).

Начнём с того, что упорядочим пары (b_i, c_i) , $i \in 1 : n$, по невозрастанию второй компоненты. Получим последовательность

$$(\widehat{b}_1, \widehat{c}_1), (\widehat{b}_2, \widehat{c}_2), \dots, (\widehat{b}_n, \widehat{c}_n),$$

где $\widehat{c}_1 \geq \widehat{c}_2 \geq \dots \geq \widehat{c}_n$. Очевидно, что

$$\varphi(u) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{\widehat{b}_i} (\widehat{c}_i - u)_+. \quad (15)$$

В частности,

$$\varphi(u) = 0 \quad \text{при } u \geq \widehat{c}_1; \quad (16)$$

при $u \in [\widehat{c}_{k+1}, \widehat{c}_k]$, $k \in 1 : n - 1$,

$$\varphi(u) = \sum_{i=1}^k \frac{1}{\widehat{b}_i} (\widehat{c}_i - u) = \sum_{i=1}^k \frac{\widehat{c}_i}{\widehat{b}_i} - \left(\sum_{i=1}^k \frac{1}{\widehat{b}_i} \right) u; \quad (17)$$

наконец,

$$\varphi(u) = \sum_{i=1}^n \frac{\widehat{c}_i}{\widehat{b}_i} - \left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{\widehat{b}_i} \right) u \quad \text{при } u \leq \widehat{c}_n. \quad (18)$$

В силу (17)

$$\varphi(u) - \varphi(\widehat{c}_k) = \left(\sum_{i=1}^k \frac{1}{\widehat{b}_i} \right) (\widehat{c}_k - u).$$

Обозначив

$$p_k = \sum_{i=1}^k \frac{1}{\widehat{b}_i},$$

придём к формуле

$$\varphi(u) = \varphi(\widehat{c}_k) + p_k(\widehat{c}_k - u), \quad u \in [\widehat{c}_{k+1}, \widehat{c}_k], \quad k \in 1 : n - 1. \quad (19)$$

Аналогично из (18) следует, что

$$\varphi(u) = \varphi(\widehat{c}_n) + p_n(\widehat{c}_n - u), \quad u \leq \widehat{c}_n. \quad (20)$$

На основании (15), (16), (19) и (20) заключаем, что функция $\varphi(u)$ является непрерывной ломаной, выпуклой и строго убывающей от $-\infty$ до 0 на полуоси $(-\infty, \widehat{c}_1)$ (см. рис. 3).

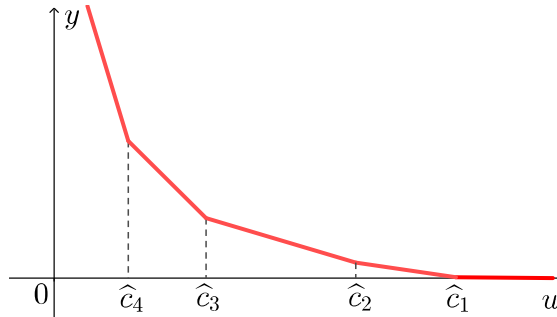


Рис. 3. График ломаной $y = \varphi(u)$

Отметим, что ломаная $\varphi(u)$ на отрезке $[\widehat{c}_n, \widehat{c}_1]$ полностью определяется своими значениями $\varphi(\widehat{c}_k)$ в узлах \widehat{c}_k , $k \in 1 : n$. В силу (19) эти значения связаны формулой

$$\varphi(\widehat{c}_{k+1}) = \varphi(\widehat{c}_k) + p_k(\widehat{c}_k - \widehat{c}_{k+1}), \quad k \in 1 : n - 1.$$

Обозначив $\varphi_k = \varphi(\widehat{c}_k)$, получим для последовательности $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ рекуррентное соотношение

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= 0, \quad p_0 = 0; \\ p_k &= p_{k-1} + \frac{1}{\widehat{b}_k}, \\ \varphi_{k+1} &= \varphi_k + p_k(\widehat{c}_k - \widehat{c}_{k+1}), \\ k &\in 1 : n - 1. \end{aligned} \quad (21)$$

4°. Нас интересует решение u^* уравнения $\varphi(u) = X$. Из свойств функции $\varphi(u)$ следует, что такое решение существует и единственно. Для его нахождения будем последовательно вычислять значения $\varphi_1, \varphi_2, \dots$ по формулам (21), пока не встретим индекс k_0 , на котором

$$\varphi_{k_0} < X \leq \varphi_{k_0+1}.$$

В этом случае $u^* \in [\hat{c}_{k_0+1}, \hat{c}_{k_0}]$ (см. рис. 4).

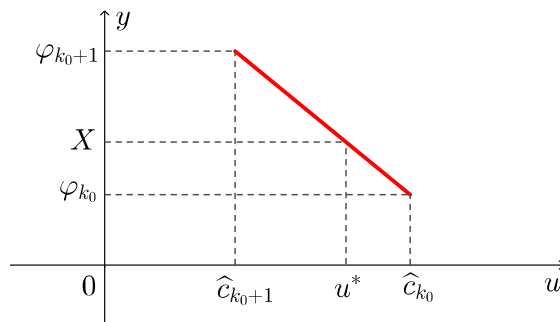


Рис. 4. Локализация решения u^* уравнения $\varphi(u) = X$

Согласно (19) имеем

$$u^* = \hat{c}_{k_0} - \frac{1}{p_{k_0}}(X - \varphi_{k_0}). \quad (22)$$

Если $\varphi_n < X$, то $u^* < \hat{c}_n$. В силу (20), u^* вычисляется по той же формуле (22) при $k_0 = n$.

На основании (13) для компонент решения $x^* = (x_1^*, \dots, x_n^*)$ задачи (6) получаем представление

$$x_i^* = \frac{1}{b_i}(c_i - u^*)_+, \quad i \in 1 : n.$$

5°. Задачу (6) можно считать формализацией следующей задачи поиска. Пусть в нашем распоряжении имеется X единиц времени, чтобы обнаружить некоторый объект. Этот объект может находиться в одном из n мест. Если объект находится в i -м месте, то, потратив x_i единиц времени, мы можем обнаружить его с вероятностью $1 - e^{-b_i x_i}$. Вероятность того, что объект находится в i -м месте, равна a_i . Как разбить общее время X на сумму x_i так, чтобы максимизировать вероятность обнаружения интересующего нас объекта?

Параметр b_i можно интерпретировать как уровень условий, благоприятствующих поиску объекта в i -м месте. Представляет интерес проанализировать влияние параметров b_i на оптимальное распределение $\{x_i^*\}$.

Возьмём конкретные данные. Пусть $n = 4$, $a_1 = 0.4$, $a_2 = 0.3$, $a_3 = 0.2$, $a_4 = 0.1$, $X = 3$. При $b_1 = b_2 = b_3 = b_4 = 1$ оптимальное распределение $x^* = (x_1^*, x_2^*, x_3^*, x_4^*)$ имеет вид

$$x^* = (1.327, 1.039, 0.634, 0).$$

Теперь при каждом фиксированном $i \in 1 : 4$ будем изменять значения b_i , сохраняя остальные b_k равными единице. На рис. 5 изображены четыре графика, которые показывают, как изменяются x_i^* в зависимости от b_i .

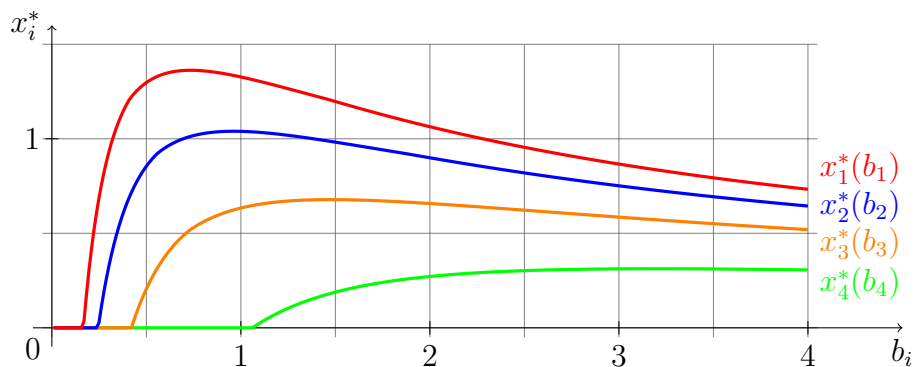


Рис. 5. Графики зависимости x_i^* от b_i

На каждом графике выделяются два значения b_i :

b_i^0 — значение, до которого $x_i^* = 0$;

b_i^1 — значение, после которого x_i^* начинает убывать.

В рассматриваемом случае

$$\begin{aligned} b_1^0 &= 0.167, & b_2^0 &= 0.245, & b_3^0 &= 0.421, & b_4^0 &= 1.061; \\ b_1^1 &= 0.734, & b_2^1 &= 0.962, & b_3^1 &= 1.475, & b_4^1 &= 3.201. \end{aligned}$$

В таблице представлена более полная информация об изменении всего оптимального распределения x^* при изменении b_2 .

Таблица

b_2	x_1^*	x_2^*	x_3^*	x_4^*
0.245	1.693	0	1	0.307
0.484	1.416	0.832	0.723	0.029
0.723	1.342	1.009	0.649	0
0.962	1.327	1.039	0.634	0
1.5	1.356	0.982	0.662	0
2.5	1.420	0.819	0.727	0.034
4	1.479	0.644	0.785	0.092

6°. Другие примеры на применение леммы Гиббса при решении сепарабельных экстремальных задач можно найти в обзорной статье [2].

ЛИТЕРАТУРА

1. Данскин Дж. М. *Теория максимина и её приложение к задачам распределения вооружения*. М.: Изд-во «Советское радио», 1970. 200 с.
2. Patriksson M. *A survey on the continuous nonlinear resource allocation problem* // European J. Operational Research. **185** (2008), 1-46.