

# НЕРАВЕНСТВА И ЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ\*

В. Н. Малозёмов

malv@math.spbu.ru

4 сентября 2014 г.

**Аннотация.** Доклад посвящён элементарным методам в экстремальных задачах.

1°. Рассмотрим несколько конкретных экстремальных задач.

**ЗАДАЧА 1.** *Найти прямоугольный параллелепипед наибольшего объёма при заданной площади его поверхности.*

Эта задача легко формализуется. Пусть  $x_1, x_2, x_3$  — длины рёбер параллелепипеда. Требуется максимизировать функцию

$$V(x) = x_1x_2x_3$$

при ограничениях

$$\begin{aligned} a(x) &:= x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 - p = 0, \\ x_1 &> 0, \quad x_2 > 0, \quad x_3 > 0. \end{aligned}$$

Здесь  $p > 0$  — половина площади поверхности параллелепипеда.

Имеем задачу на условный экстремум. Согласно общим рекомендациям [1, с. 609–624] составим функцию Лагранжа

$$L(x, \lambda) = x_1x_2x_3 - \lambda(x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 - p)$$

и запишем необходимые условия экстремума

$$L'_{x_1}(x, \lambda) := x_2x_3 - \lambda(x_2 + x_3) = 0, \tag{1}$$

$$L'_{x_2}(x, \lambda) := x_1x_3 - \lambda(x_1 + x_3) = 0, \tag{2}$$

$$L'_{x_3}(x, \lambda) := x_1x_2 - \lambda(x_1 + x_2) = 0, \tag{3}$$

$$x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = p. \tag{4}$$

---

\*Семинар по конструктивному негладкому анализу и недифференцируемой оптимизации «CNSA & NDO»: <http://www.apmath.spbu.ru/cnsa/>

Нужно найти решение этой системы с положительными  $x_1, x_2, x_3$ .

Ясно, что  $\lambda \neq 0$ . Согласно (1) и (2),

$$\frac{x_2 + x_3}{x_2 x_3} = \frac{x_1 + x_3}{x_1 x_3},$$

откуда следует, что  $x_1 = x_2$ . Согласно (2) и (3),

$$\frac{x_1 + x_3}{x_1 x_3} = \frac{x_1 + x_2}{x_1 x_2},$$

откуда следует, что  $x_2 = x_3$ . Значит,  $x_1 = x_2 = x_3$ . На основании (4) получаем

$$x_1^* = x_2^* = x_3^* = \sqrt{\frac{p}{3}}.$$

При этом

$$\lambda^* = \frac{x_2^* x_3^*}{x_2^* + x_3^*} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{p}{3}}.$$

Точка  $x^* = (x_1^*, x_2^*, x_3^*)$  является стационарной. Покажем, что она удовлетворяет достаточному условию строгого локального максимума. Для этого найдём матрицу вторых производных функции Лагранжа

$$L''_{xx}(x^*, \lambda^*) = \begin{pmatrix} 0 & x_3^* - \lambda^* & x_2^* - \lambda^* \\ x_3^* - \lambda^* & 0 & x_1^* - \lambda^* \\ x_2^* - \lambda^* & x_1^* - \lambda^* & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{p}{3}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

и запишем формулу для второго дифференциала

$$\langle L''_{xx}(x^*, \lambda^*)h, h \rangle = \sqrt{\frac{p}{3}}(h_1 h_2 + h_1 h_3 + h_2 h_3).$$

Нужно проверить, что второй дифференциал принимает отрицательные значения на всех ненулевых векторах  $h$ , удовлетворяющих ограничению

$$\langle a'(x^*), h \rangle = 0,$$

которое в данном случае принимает вид

$$2 \sqrt{\frac{p}{3}}(h_1 + h_2 + h_3) = 0.$$

Имеем

$$0 = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{p}{3}}(h_1 + h_2 + h_3)^2 = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{p}{3}}(h_1^2 + h_2^2 + h_3^2) + \langle L''_{xx}(x^*, \lambda^*)h, h \rangle,$$

откуда следует, что

$$\langle L''_{xx}(x^*, \lambda^*)h, h \rangle = -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{p}{3}}(h_1^2 + h_2^2 + h_3^2) < 0.$$

Таким образом, теория условного экстремума позволила установить, что в задаче о прямоугольном параллелепипеде наибольшего объёма при заданной площади его поверхности точка  $x^*$  с равными компонентами (что соответствует кубу) является точкой строгого локального максимума.

2°. Остаётся вопрос: будет ли  $x^*$  точкой *глобального* максимума? Теория условного экстремума не даёт ответа на этот вопрос («молчит наука»). Удивительно, но разобраться в данной ситуации помогает «совсем простая штука» — неравенство Коши между средним геометрическим и средним арифметическим положительных чисел  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , которое записывается так:

$$\sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n} \leq \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}. \quad (5)$$

Неравенство (5) выполняется как равенство только тогда, когда  $x_1 = x_2 = \dots = x_n$ .

В книге О. А. Иванова [2, с. 67–70] приводятся пять доказательств неравенства Коши. На самом деле, их значительно больше. Одно из наиболее изящных доказательств будет представлено в Приложении 1.

Вернёмся к задаче о прямоугольном параллелепипеде. Согласно (5) при  $n = 3$  и (4) имеем

$$V^2(x) = (x_1 x_2)(x_2 x_3)(x_3 x_1) \leq \left( \frac{x_1 x_2 + x_2 x_3 + x_3 x_1}{3} \right)^3 = \left( \frac{p}{3} \right)^3,$$

так что

$$V(x) \leq \left( \frac{p}{3} \right)^{3/2}.$$

Это неравенство выполняется как равенство только тогда, когда  $x_1 x_2 = x_2 x_3 = x_3 x_1$ , то есть только при  $x_1^* = x_2^* = x_3^* = \sqrt{\frac{p}{3}}$ . В точке  $x^* = (x_1^*, x_2^*, x_3^*)$  достигается максимальное значение функции  $V(x)$ , равное  $(\frac{p}{3})^{3/2}$ , и  $x^*$  — единственная точка, удовлетворяющая ограничениям задачи, с таким свойством. Значит,  $x^*$  — единственная точка глобального максимума.

3°. Рассмотрим ещё две экстремальные задачи, при решении которых можно эффективно использовать неравенство Коши.

**ЗАДАЧА 2.** Среди треугольников, имеющих заданный периметр  $2p$ , найти треугольник с наибольшей площадью.

Решение. Для площади треугольника справедлива формула Герона

$$S(x) = \sqrt{p(p-x_1)(p-x_2)(p-x_3)}.$$

Здесь  $x_1, x_2, x_3$  — длины сторон треугольника и  $x = (x_1, x_2, x_3)$ . Требуется максимизировать  $S(x)$  при ограничениях

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 2p, \\ 0 < x_i < p, \quad i &\in 1 : 3. \end{aligned}$$

В силу неравенства Коши (5) имеем

$$S^2(x) = p[(p - x_1)(p - x_2)(p - x_3)] \leq p\left(\frac{p}{3}\right)^3,$$

так что

$$S(x) \leq \frac{p^2}{3\sqrt{3}}.$$

Это неравенство выполняется как равенство только тогда, когда  $p - x_1 = p - x_2 = p - x_3$ , то есть только при  $x_1^* = x_2^* = x_3^* = \frac{2}{3}p$ . Значит, единственным решением задачи 2 является равносторонний треугольник.

В следующей задаче ответ не столь очевиден.

**ЗАДАЧА 3.** Лист бумаги имеет форму круга. Из него вырежем сектор с углом  $\varphi$  радиан, а края оставшейся части склеим. Получим боковую поверхность прямого кругового конуса, длина образующей которого равна радиусу круга  $R$ . Требуется найти угол  $\varphi$ , порождающий конус наибольшего объёма.

**Решение.** Длина дуги вырезанного сектора равна  $\varphi R$ , так что длина окружности, лежащей в основании конуса, равна  $2\pi R - \varphi R$ . Обозначим через  $r$  радиус данной окружности. Тогда  $2\pi r = 2\pi R - \varphi R$  и

$$\varphi = 2\pi\left(1 - \frac{r}{R}\right). \quad (6)$$

Высота конуса  $h$  равна  $\sqrt{R^2 - r^2}$ , а его объём выражается формулой

$$V(r) = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi r^2 \sqrt{R^2 - r^2}.$$

В силу неравенства Коши (5) имеем

$$V^2(r) = \frac{4}{9}\pi^2 \left[\frac{r^2}{2} \cdot \frac{r^2}{2} \cdot (R^2 - r^2)\right] \leq \frac{4}{9}\pi^2 \left(\frac{R^2}{3}\right)^3.$$

Значит,

$$V(r) \leq \frac{2\sqrt{3}}{27}\pi R^3.$$

Это неравенство выполняется как равенство только тогда, когда  $\frac{r^2}{2} = R^2 - r^2$ , то есть только при  $r^* = \sqrt{\frac{2}{3}}R$ . Принимая во внимание соотношение (6), приходим к заключению: задача 3 имеет единственное решение

$$\varphi^* = 2\pi\left(1 - \sqrt{\frac{2}{3}}\right).$$

4°. При решении экстремальных задач наряду с неравенством Коши используется неравенство Коши-Буняковского:

$$\sum_{i=1}^n x_i y_i \leq \left( \sum_{i=1}^n x_i^2 \right)^{1/2} \cdot \left( \sum_{i=1}^n y_i^2 \right)^{1/2}. \quad (7)$$

Если не все  $x_i$  и не все  $y_i$  равны нулю, то неравенство (7) выполняется как равенство только тогда, когда  $y_i = \lambda x_i$ ,  $i \in 1 : n$ , при некотором  $\lambda > 0$ .

Следствием неравенства Коши-Буняковского является неравенство между средним арифметическим и средним квадратичным положительных чисел  $x_1, x_2, \dots, x_n$ :

$$\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} \leq \left( \frac{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}{n} \right)^{1/2}. \quad (8)$$

Неравенство (8) выполняется как равенство только тогда, когда  $x_1 = x_2 = \dots = x_n$ .

Оригинальное доказательство этих утверждений мы приведём в Приложении 2. А пока рассмотрим три конкретных задачи.

**ЗАДАЧА 4.** *Найти наибольшее и наименьшее значения линейной формы*

$$f(x) = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_n x_n,$$

*в которой не все коэффициенты  $c_i$  равны нулю, при ограничении*

$$x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 = 1. \quad (9)$$

**Решение.** Согласно (7) для любого вектора  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ , удовлетворяющего ограничению (9), имеем

$$f(x) \leq \left( \sum_{i=1}^n c_i^2 \right)^{1/2} =: \|c\|.$$

Равенство достигается только тогда, когда  $x_i = \lambda c_i$ ,  $i \in 1 : n$ , при некотором  $\lambda > 0$ . В силу (9),  $\lambda = \frac{1}{\|c\|}$  и

$$x_i^* = \frac{c_i}{\|c\|}, \quad i \in 1 : n.$$

Получили, что вектор  $x^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$  является единственной точкой максимума функции  $f(x)$  при ограничении (9).

Далее запишем

$$-f(x) = (-c_1)x_1 + (-c_2)x_2 + \dots + (-c_n)x_n.$$

Аналогично предыдущему для любого вектора  $x$ , удовлетворяющего ограничению (9), получим  $-f(x) \leq A$  или  $f(x) \geq -A$ , причём равенство достигается только тогда, когда  $x_i = \lambda(-c_i)$ ,  $i \in 1 : n$ , при некотором  $\lambda > 0$ . Отсюда легко приходим к выводу о том, что вектор  $-x^*$  является единственной точкой минимума функции  $f(x)$  при ограничении (9).

**ЗАДАЧА 5.** Найти наименьшее значения квадратичной функции

$$f(x) = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2$$

при ограничении

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n \geq b, \quad (10)$$

где не все коэффициенты  $a_i$  равны нулю.

Решение. При  $b \leq 0$  очевидной точкой минимума является нулевой вектор  $x$ . Поэтому будем считать, что  $b > 0$ .

Согласно неравенствам (10) и (7) имеем

$$0 < b \leq \sum_{i=1}^n a_i x_i \leq \left( \sum_{i=1}^n a_i^2 \right)^{1/2} \cdot \left( \sum_{i=1}^n x_i^2 \right)^{1/2}.$$

Отсюда следует, что

$$f(x) \geq \left( \frac{b}{\|a\|} \right)^2.$$

Равенство достигается только тогда, когда

$$\sum_{i=1}^n a_i x_i = b$$

и

$$\sum_{i=1}^n a_i x_i = \left( \sum_{i=1}^n a_i^2 \right)^{1/2} \cdot \left( \sum_{i=1}^n x_i^2 \right)^{1/2}.$$

Это соответствует тому, что  $x_i = \lambda a_i$ ,  $i \in 1 : n$ , при некотором  $\lambda > 0$  и

$$\lambda \sum_{i=1}^n a_i^2 = b.$$

Получаем

$$\lambda = \frac{b}{\|a\|^2} \quad \text{и} \quad x_i^* = \frac{ba_i}{\|a\|^2}, \quad i \in 1 : n.$$

Вектор  $x^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$  при  $b > 0$  является единственной точкой минимума квадратичной функции  $f(x)$  на полупространстве, определяемом неравенством (10).

**ЗАДАЧА 6.** Обозначим через  $x_1, x_2, x_3$  длины сторон треугольника. Найдите наименьшее значение величины

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$$

при условии, что площадь треугольника равна  $S$ .

**Решение.** Положим  $p = \frac{1}{2}(x_1 + x_2 + x_3)$ . На основании формулы Герона для площади треугольника и неравенств (5), (8) для средних величин получаем

$$\begin{aligned} S^2 &= p[(p - x_1)(p - x_2)(p - x_3)] \leq p\left(\frac{p}{3}\right)^3 = 3\left(\frac{p}{3}\right)^4 = \\ &= \frac{3}{16} \left(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}\right)^4 \leq \frac{3}{16} \left(\frac{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}{3}\right)^2. \end{aligned} \quad (11)$$

Отсюда следует, что

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \geq (4\sqrt{3})S.$$

Равенство в этом неравенстве достигается только тогда, когда оба неравенства в (11) выполняются как равенства. А это возможно только при  $x_1 = x_2 = x_3$ .

Приходим к заключению: наименьшее значение величины  $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$  равно  $(4\sqrt{3})S$  и достигается на равностороннем треугольнике.

**5°.** Вернёмся к задаче 1 о прямоугольном параллелепипеде наибольшего объёма. Было установлено, что в этой задаче имеется единственная стационарная точка  $x^* = (x_1^*, x_2^*, x_3^*)$  с равными компонентами  $x_1^* = x_2^* = x_3^* = \sqrt{\frac{p}{3}}$ . То, что  $x^*$  является точкой глобального максимума, можно выяснить с помощью соображений, отличных от приведённых в п. 2°. Достаточно доказать, что в задаче 1 максимизации функции  $V(x)$  на множестве планов  $\Omega$  точка максимума  $\hat{x}$  существует и ограничение в ней регулярно. Тогда согласно теории условного экстремума точка  $\hat{x}$  будет стационарной, а поскольку стационарная точка единственна, это  $x^*$ , то необходимо  $x^* = \hat{x}$ .

Покажем, что точка максимума  $\hat{x}$  существует<sup>1</sup>. Отягчающим обстоятельством является неограниченность множества планов  $\Omega$ . Этому множеству принадлежат, например, точки

$$x^{(n)} = \left(n, \frac{p}{2n}, \frac{pn}{2n^2+p}\right), \quad n = 1, 2, \dots$$

Вместе с тем, справедливо следующее утверждение: если для плана  $x \in \Omega$  выполняется неравенство

$$\|x\|_\infty := \max\{x_1, x_2, x_3\} \geq N,$$

<sup>1</sup> Доказательство предложил М. В. Долгополик.

то

$$V(x) \leq \frac{p^2}{N}. \quad (12)$$

Действительно, пусть, например,  $x_1 \geq N$ . В силу ограничения (4) имеем  $x_1 x_2 \leq p$ ,  $x_1 x_3 \leq p$ , так что

$$V(x) \leq (x_1 x_2)(x_1 x_3) \frac{1}{x_1} \leq \frac{p^2}{N}.$$

Введём обозначение

$$\mu = \sup_{x \in \Omega} V(x).$$

Ясно, что  $\mu > 0$ . Возьмём максимизирующую последовательность планов  $x^{(k)} \in \Omega$ , для которых

$$\lim_{k \rightarrow \infty} V(x^{(k)}) = \mu. \quad (13)$$

Последовательность  $\{x^{(k)}\}$  ограничена. В противном случае найдётся подпоследовательность  $\{x^{(k_j)}\}$ , такая, что  $\|x^{(k_j)}\|_\infty \rightarrow +\infty$  при  $k_j \rightarrow \infty$ . Согласно (12),

$$V(x^{(k_j)}) \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad k_j \rightarrow \infty,$$

что противоречит (13) и условию  $\mu > 0$ .

Выделим из последовательности  $\{x^{(k)}\}$  сходящуюся подпоследовательность. Можно считать, что вся последовательность  $\{x^{(k)}\}$  сходится при  $k \rightarrow \infty$  к некоторой точке  $\hat{x}$ . В пределе получаем

$$V(\hat{x}) = \lim_{k \rightarrow \infty} V(x^{(k)}) = \mu,$$

то есть

$$V(\hat{x}) = \mu. \quad (14)$$

К этому нужно добавить, что  $\hat{x}$  принадлежит  $\Omega$ , так как согласно (14) все компоненты вектора  $\hat{x}$  положительны, а ограничение (4) при  $x = \hat{x}$  выполняется из соображений непрерывности.

Таким образом, установлено, что у задачи 1 точка максимума  $\hat{x}$  существует. Ограничение в ней регулярно в силу того, что градиент

$$a'(\hat{x}) = (\hat{x}_2 + \hat{x}_3, \hat{x}_1 + \hat{x}_3, \hat{x}_1 + \hat{x}_2)$$

отличен от нулевого вектора.

## ПРИЛОЖЕНИЕ 1

### Доказательство неравенства Коши

Начнём со вспомогательного утверждения.

**ЛЕММА 1.** Пусть  $x_1, x_2, \dots, x_n$  — положительные числа, не равные между собой, и

$$x_1 x_2 \dots x_n = 1. \quad (15)$$

Тогда

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n > n.$$

*Доказательство.* Воспользуемся методом математической индукции.

При  $n = 2$  имеем  $x_1 > 0$ ,  $x_2 > 0$ ,  $x_1 \neq x_2$  и  $x_1 x_2 = 1$ , поэтому

$$0 < (x_1 - x_2)^2 = (x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2 = (x_1 + x_2)^2 - 4.$$

Отсюда следует, что  $x_1 + x_2 > 2$ .

Сделаем индукционный переход от  $n$  к  $n+1$ . Возьмём  $n+1$  положительных чисел  $x_1, \dots, x_n, x_{n+1}$ , которые не все равны между собой и удовлетворяют условию

$$x_1 \dots x_n x_{n+1} = 1.$$

Ясно, что среди них существует число, меньшее единицы, и число, большее единицы. Пусть для определённости  $x_n < 1$ ,  $x_{n+1} > 1$ . Тогда

$$(1 - x_n)(x_{n+1} - 1) > 0$$

и

$$x_n x_{n+1} < x_n + x_{n+1} - 1. \quad (16)$$

Рассмотрим  $n$  положительных чисел  $x_1, \dots, x_{n-1}, (x_n x_{n+1})$ , произведение которых равно единице. Если не все они равны между собой, то по индукционному предположению

$$x_1 + \dots + x_{n-1} + (x_n x_{n+1}) > n. \quad (17)$$

Если же  $x_1 = \dots = x_{n-1} = (x_n x_{n+1}) = 1$  (это возможно, например, при  $x_1 = \dots = x_{n-1} = 1$ ,  $x_n = \frac{1}{2}$ ,  $x_{n+1} = 2$ ), то строгое неравенство (17) нужно заменить равенством. В обоих случаях

$$x_1 + \dots + x_{n-1} + (x_n x_{n+1}) \geq n.$$

С учётом (16) получаем

$$x_1 + \dots + x_{n-1} + x_n + x_{n+1} - 1 > n,$$

что равносильно требуемому.  $\square$

Теперь легко доказать неравенство Коши. Пусть  $x_1, x_2, \dots, x_n$  — положительные числа, не все равные между собой. Обозначим

$$y_i = \frac{x_i}{\sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n}}, \quad i \in 1 : n.$$

Числа  $y_i$  положительные, не все равные между собой и  $y_1 y_2 \dots y_n = 1$ . По лемме  $y_1 + y_2 + \dots + y_n > n$ , что равносильно неравенству

$$\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} > \sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n}. \quad (18)$$

Если все  $x_i$  равны между собой (и только в этом случае) строгое неравенство (18) нужно заменить равенством.

## ПРИЛОЖЕНИЕ 2

### Доказательство неравенства Коши-Буняковского

Введём обозначения

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_n), \quad y = (y_1, y_2, \dots, y_n),$$

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i, \quad \|x\| = \left( \sum_{i=1}^n x_i^2 \right)^{1/2} = \sqrt{\langle x, x \rangle}.$$

**ЛЕММА 2.** Для ненулевых векторов  $x, y$  справедливо равенство Коши-Буняковского<sup>2</sup>

$$\langle x, y \rangle = \left( 1 - \frac{1}{2} \left\| \frac{x}{\|x\|} - \frac{y}{\|y\|} \right\|^2 \right) \|x\| \cdot \|y\|. \quad (19)$$

**Доказательство.** Рассмотрим сначала случай, когда  $\|x\| = \|y\| = 1$ . Имеем

$$\|x - y\|^2 = \langle x - y, x - y \rangle = \|x\|^2 - 2\langle x, y \rangle + \|y\|^2 = 2 - 2\langle x, y \rangle.$$

Отсюда следует, что

$$\langle x, y \rangle = 1 - \frac{1}{2} \|x - y\|^2. \quad (20)$$

Если  $x, y$  — произвольные ненулевые векторы, то подставив в (20)  $\frac{x}{\|x\|}$  и  $\frac{y}{\|y\|}$  вместо  $x$  и  $y$ , придём к (19).  $\square$

<sup>2</sup> См. [3, с. 33].

Равенство (19) для ненулевых векторов  $x, y$  делает очевидными как неравенство Коши-Буняковского

$$\langle x, y \rangle \leq \|x\| \cdot \|y\|, \quad (21)$$

так и условие обращения его в равенство

$$\frac{x}{\|x\|} = \frac{y}{\|y\|}. \quad (22)$$

Условие (22) равносильно тому, что  $y = \lambda x$  при некотором  $\lambda > 0$ .

Положив в (21)  $y_i = \frac{1}{n}$ ,  $i \in 1 : n$ , придём к неравенству между средним арифметическим и средним квадратичным положительных чисел  $x_1, x_2, \dots, x_n$ :

$$\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} \leq \left( \frac{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}{n} \right)^{1/2}. \quad (23)$$

Равенство в (23) достигается только тогда, когда  $x_1 = x_2 = \dots = x_n$ .

## ЛИТЕРАТУРА

1. Зорич В. А. *Математический анализ*. Часть 1. Изд-е 4-е. М.: МЦНМО, 2002. 664 с.
2. Иванов О. А. *Избранные главы элементарной математики*. СПб.: Изд-во СПбГУ, 1995. 224 с.
3. Малозёмов В. Н. *Линейная алгебра без определителей. Квадратичная функция*. СПб.: Изд-во СПбГУ, 1997. 80 с.