ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ СТРОГОГО ЛОКАЛЬНОГО МИНИМУМА В КЛАССИЧЕСКОЙ ВАРИАЦИОННОЙ ЗАДАЧЕ*

В. Н. Малозёмов

v.malozemov@spbu.ru

2 марта 2017 г.

Аннотация. Этот доклад примыкает к докладам [1] и [2]. При выводе достаточных условий строгого локального минимума используются первый и второй дифференциалы нелинейного интегрального функционала.

1°. Рассмотрим классическую вариационную задачу

$$J(x) := \int_a^b F\big(t, x(t), x'(t)\big)\,dt \to \inf \tag{1}$$

$$x(a) = A, \quad x(b) = B. \tag{2}$$

Считаем, что $F \in C^3(U)$, где $U \subset \mathbb{R}^3$ — открытое линейно связное множество. Напомним некоторые определения и результаты, связанные с задачей (1), (2).

Функция $x \in C^1[a,b]$ называется *допустимой*, если она удовлетворяет краевым условиям (2) и если параметрическая кривая

$$Z(x) = \Big\{\big(t, x(t), x'(t)\big) \mid t \in [a,b]\Big\}$$

содержится в U. Множество допустимых функций обозначим Ω.

Первым дифференциалом функционала $J(x)$ в точке $x_0 \in \Omega$ называется линейный интегральный функционал

$$\ell(x_0; h) = \int_a^b \Big[F'_x\big(t, x_0(t), x_0'(t)\big)h(t) + F'_{x'}\big(t, x_0(t), x_0'(t)\big)h'(t)\Big]\,dt,$$

определённый на множестве $C^1[a,b]$.

Обозначим $C_0^1[a,b] = \big\{h \in C^1[a,b] \mid h(a) = 0, h(b) = 0\big\}$.

*Семинар по конструктивному негладкому анализу и недифференцируемой оптимизации «CNSA & NDO»: `http://www.apmath.spbu.ru/cnsa/`

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. *Равенство*

$$\ell(x_0; h) = 0 \quad \forall h \in C_0^1[a,b]$$

справедливо тогда и только тогда, когда выполняются два условия:

1) *функция* $F'_{x'}\big(t, x_0(t), x'_0(t)\big)$ *непрерывно дифференцируема на* $[a,b]$*;*

2) $\frac{d}{dt}F'_{x'}\big(t, x_0(t), x'_0(t)\big) = F'_x\big(t, x_0(t), x'_0(t)\big)$, $t \in [a,b]$.

Доказательство приводится в [3, Основная лемма вариационного исчисления].

Функция $x_0 \in \Omega$, удовлетворяющая условиям 1) и 2), называется *стационарной.* Как известно [2, п. 4°], допустимая функция x_0, в которой достигается локальный минимум функционала $J(x)$ вида (1), является стационарной функцией. Имея в виду достаточные условия строгого локального минимума, в дальнейшем будем считать, что x_0 — стационарная функция. Более того, предположим, что на ней выполняется *усиленное условие Лежандра*:

$$p(t) := F''_{x'x'}\big(t, x_0(t), x'_0(t)\big) > 0 \quad \text{на} \quad [a,b]. \tag{3}$$

По теореме Гильберта о дифференцируемости [2, п. 5°] из (3) следует, что $x_0 \in C^2[a,b]$.

2°. Вторым дифференциалом функционала $J(x)$ в точке x_0 называется интегральная квадратичная форма

$$D(x_0; h) = \int_a^b \big[F''_{xx}h^2 + 2F''_{xx'}hh' + F''_{x'x'}(h')^2\big]dt, \tag{4}$$

определённая на множестве $C^1[a,b]$. Аргумент у частных производных функции F имеет вид $\big(t, x_0(t), x'_0(t)\big)$. Нас интересует вопрос о положительной определённости формы $D(x_0; h)$ на множестве $C_0^1[a,b]$.

Наряду с обозначением $p(t)$ (см. (3)) будем использовать ещё два обозначения

$$u(t) = F''_{xx'}\big(t, x_0(t), x'_0(t)\big), \quad v(t) = F''_{xx}\big(t, x_0(t), x'_0(t)\big).$$

Перепишем формулу (4) в новых обозначениях:

$$D(x_0; h) = \int_a^b \big[p(h')^2 + 2uhh' + vh^2\big]dt.$$

Напомним, что $F \in C^3(U)$. В силу (3), $x_0 \in C^2[a,b]$. Отсюда, в частности, следует, что $u \in C^1[a,b]$. При $h \in C_0^1[a,b]$ имеем

$$2\int_a^b uhh'dt = \int_a^b udh^2 = -\int_a^b u'h^2dt.$$

Значит,
$$D(x_0; h) = \int_a^b \big[p(h')^2 + (v - u')h^2\big]dt, \quad h \in C_0^1[a, b]. \tag{5}$$
Квадратичная форма $D(x_0; h)$ приведена к каноническому виду.

Теперь можно воспользоваться теоремой Якоби [3, п. 3°]. Напомним, что функция $h_0 \in C^1[a, b]$, удовлетворяющая уравнению Якоби
$$(ph')' = (v - u')h \tag{6}$$
и начальным условиям $h(a) = 0$, $h'(a) = 1$, называется *главным решением уравнения Якоби.*

ТЕОРЕМА ЯКОБИ. *Пусть $F \in C^3(U)$, x_0 — стационарная кривая и выполнено усиленное условие Лежандра* (3). *В этом случае интегральная квадратичная форма $D(x_0; h)$ будет положительно определённой на $C_0^1[a, b]$ тогда и только тогда, когда главное решение уравнения Якоби $h_0(t)$ положительно на полуоткрытом интервале $(a, b]$.*

Условие $h_0(t) > 0$ при $t \in (a, b]$ называется *усиленным условием Якоби.*

Нам потребуется ещё один результат, характеризующий положительно определённую квадратичную форму $D(x_0; h)$ [3, п. 3°].

УТВЕРЖДЕНИЕ 2. *Если на стационарной кривой x_0 выполняются усиленное условие Лежандра и усиленное условие Якоби, то найдётся положительное число μ, такое что*
$$D(x_0; h) \geqslant \mu \int_a^b (h')^2 dt \quad \forall h \in C_0^1[a, b]. \tag{7}$$

3°. Допустимая функция x_0 называется точкой строгого локального минимума в задаче (1), (2), если найдётся $\delta > 0$, такое что при всех $h \in C_0^1[a, b]$ со свойствами $h(t) \not\equiv 0$ на $[a, b]$, $\|h\|_1 \leqslant \delta$ справедливо неравенство $J(x_0 + h) > J(x_0)$. Здесь
$$\|h\|_1 = \max_{t\in[a,b]}\big|h(t)\big| + \max_{t\in[a,b]}\big|h'(t)\big|.$$

ТЕОРЕМА (о достаточных условиях строгого локального минимума). *Пусть $F \in C^3(U)$. Если x_0 — стационарная функция, на которой выполнены усиленное условие Лежандра и усиленное условие Якоби, то найдутся $\delta > 0$ и $\alpha > 0$, такие, что*
$$J(x_0 + h) \geqslant J(x_0) + \alpha \int_a^b (h')^2 dt \tag{8}$$
при всех $h \in C_0^1[a, b]$ со свойством $\|h\|_1 \leqslant \delta$.

Отметим, что $\int_a^b (h')^2 dt > 0$ при $h \in C_0^1[a,b]$, $h(t) \not\equiv 0$ на $[a,b]$.

Доказательство. Воспользуемся разложением [1, п. 5°]

$$J(x_0 + h) = J(x_0) + \ell(x_0; h) + \tfrac{1}{2} D(x_0; h) + \omega_2(x_0; h). \tag{9}$$

Здесь $\ell(x_0; h)$, $D(x_0; h)$ — первый и второй дифференциалы функционала $J(x)$ в точке x_0 и $\omega_2(x_0; h)$ — остаточный член, обладающий следующим свойством: по $\varepsilon > 0$ найдётся $\delta > 0$, такое что

$$\bigl|\omega_2(x_0; h)\bigr| \leqslant \frac{\varepsilon}{b-a} \int_a^b \bigl[|h|^2 + 2|hh'| + |h'|^2\bigr] dt \tag{10}$$

при условии $\|h\|_1 \leqslant \delta$. Нас интересуют приращения h только из $C_0^1[a,b]$, ибо только в этом случае функция $x_0 + h$ удовлетворяет краевым условиям (2). То, что x_0 — стационарная кривая, гарантирует равенство $\ell(x_0; h) = 0$ при всех $h \in C_0^1[a,b]$. На основании (9) и (7) получаем

$$J(x_0 + h) - J(x_0) \geqslant \tfrac{1}{2} D(x_0; h) - \bigl|\omega_2(x_0; h)\bigr| \geqslant \tfrac{1}{2}\mu \int_a^b (h')^2 dt - \bigl|\omega_2(x_0; h)\bigr|. \tag{11}$$

Покажем, что найдётся такое $\delta > 0$, что для $h \in C_0^1[a,b]$, $\|h\|_1 \leqslant \delta$ выполняется неравенство

$$\bigl|\omega_2(x_0; h)\bigr| \leqslant \tfrac{1}{4}\mu \int_a^b (h')^2 dt. \tag{12}$$

Тогда из (11) будет следовать требуемое неравенство (8) с $\alpha = \frac{1}{4}\mu$.

Обратимся к формуле (10) и проверим, что при всех $h \in C_0^1[a,b]$

$$\int_a^b \bigl[|h|^2 + 2|hh'| + |h'|^2\bigr] dt \leqslant (b-a+1)^2 \int_a^b (h')^2 dt. \tag{13}$$

Действительно, имеем $h(t) = \int_a^t h'(\tau) d\tau$. По неравенству Коши – Буняковского

$$h^2(t) = \Bigl(\int_a^t 1 \cdot h'(\tau) d\tau\Bigr)^2 \leqslant (b-a) \int_a^b (h')^2 dt.$$

Интегрируя, получаем

$$\int_a^b h^2 dt \leqslant (b-a)^2 \int_a^b (h')^2 dt. \tag{14}$$

Далее

$$\int_a^b |hh'| dt \leqslant \Bigl(\int_a^b h^2 dt\Bigr)^{1/2} \Bigl(\int_a^b (h')^2 dt\Bigr)^{1/2} \leqslant (b-a) \int_a^b (h')^2 dt. \tag{15}$$

На основании (14) и (15) приходим к (13).

Положим
$$\varepsilon = \frac{\mu(b-a)}{4(b-a+1)^2}.$$
Как отмечалось, по этому ε найдётся $\delta \geqslant 0$, такое, что при $h \in C_0^1[a,b]$, $\|h\|_1 \leqslant \delta$ выполняется неравенство (10). Теперь из (10) и (13) следует неравенство (12).

Теорема доказана. □

4°. В качестве примера на использование условий оптимальности рассмотрим задачу Эйлера:
$$J(x) := \int_0^1 \left[(x')^2 + \sigma\cos x\right] dt \to \inf$$
$$x(0) = 0, \quad x(1) = 0,$$
где $\sigma > 0$ — параметр. Требуется найти точную верхнюю границу тех σ, при которых функция $x_0(t) \equiv 0$ на $[0,1]$ будет точкой строгого локального минимума функционала $J(x)$.

Имеем $F = (x')^2 + \sigma\cos x$, $F'_x = -\sigma\sin x$, $F'_{x'} = 2x'$,
$$F''_{xx} = -\sigma\cos x, \quad F''_{xx'} \equiv 0, \quad F''_{x'x'} \equiv 2.$$
Очевидно, что функция $x_0(t) \equiv 0$ на $[0,1]$ удовлетворяет условиям 1) и 2) утверждения 1 при всех $\sigma > 0$. Значит, при всех $\sigma > 0$ функция x_0 является стационарной. Выполнение усиленного условия Лежандра очевидно. Проверим, когда на x_0 выполняется усиленное условие Якоби.

В данном случае $p(t) \equiv 2$, $u(t) \equiv 0$, $v(t) = -\sigma$, так что уравнение Якоби имеет вид
$$2h'' + \sigma h = 0.$$
Начальным условиям $h(0) = 0$, $h'(0) = 1$ удовлетворяет функция
$$h_0(t) = \sqrt{\frac{2}{\sigma}}\sin\sqrt{\frac{\sigma}{2}}t.$$
По определению $h_0(t)$ — главное решение уравнения Якоби (см. рис.)

Обозначим через t_0 наименьший положительный корень фнукции $h_0(t)$. Ясно, что $t_0 = \pi\sqrt{\frac{2}{\sigma}}$. Если $t_0 > 1$ ($\sigma < 2\pi^2$), то выполнено усиленное условие Якоби. Значит, при $\sigma < 2\pi^2$ функция $x_0(t) \equiv 0$ на $[0,1]$ является точкой строгого локального минимума. При $\sigma > 2\pi^2$ ($t_0 < 1$) нарушается необходимое условие локального минимума второго порядка [2, п. 10°], то есть x_0 не будет

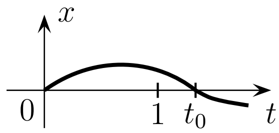

Рис. Графики функции $h_0(t)$.

даже точкой локального минимума. Из сказанного следует, что точная верхняя граница тех $\sigma > 0$, при которых x_0 является точкой строгого локального минимума функционала $J(x)$, равна $2\pi^2$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Малозёмов В. Н. *Первый и второй дифференциалы интегрального функционала* // Семинар «DHA & CAGD». Избранные доклады. 5 декабря 2013 г. (`http://dha.spb.ru/reps13.shtml#1205`)

2. Малозёмов В. Н. *Необходимые условия оптимальности первого и второго порядков в простейшей нелинейной задаче вариационного исчисления* // Семинар «CNSA & NDO». Избранные доклады. 8 декабря 2016 г. (`http://apmath.spbu.ru/cnsa/reps16.shtml#1208`)

3. Малозёмов В. Н. *Квадратичные вариационные задачи* // Вестник молодых учёных. Прикл. мат. и мех. 2000. № 3. С. 12–22.