НЕОБХОДИМЫЕ УСЛОВИЯ ОПТИМАЛЬНОСТИ ПЕРВОГО И ВТОРОГО ПОРЯДКОВ В ПРОСТЕЙШЕЙ НЕЛИНЕЙНОЙ ЗАДАЧЕ ВАРИАЦИОННОГО ИСЧИСЛЕНИЯ*

В. Н. Малозёмов

v.malozemov@spbu.ru

8 декабря 2016 г.

Аннотация. Рассматривается простейшая нелинейная задача вариационного исчисления. С помощью первого и второго дифференциалов нелинейного интегрального функционала, основной леммы вариационного исчисления и теоремы Якоби о критерии неотрицательной определённости интегральной квадратичной формы выводятся необходимые условия локального минимума первого и второго порядков для этой задачи.

1°. Рассмотрим вариационную задачу

$$J(x) := \int_a^b F\big(t, x(t), x'(t)\big)dt \to \inf, \tag{1}$$

$$x(a) = A, \quad x(b) = B. \tag{2}$$

Здесь $F = F(t, x, y)$ — функция трёх переменных, заданная и непрерывно дифференцируемая на некотором открытом линейно связном множестве $U \subset \mathbb{R}^3$. *Естественной областью определения* Ω^{o} функционала $J(x)$ является множество функций $x \in C^1[a, b]$, таких, что параметрическая кривая

$$\Gamma(x) = \Big\{ \big(t, x(t), x'(t)\big) \mid t \in [a, b] \Big\}$$

содержится в U. Функция $x \in \Omega^{\text{o}}$, удовлетворяющая краевым условиям (2), называется *планом* вариационной задачи (1). Требуется найти план, доставляющий минимум функционалу $J(x)$.

*Семинар по конструктивному негладкому анализу и недифференцируемой оптимизации «CNSA & NDO»: `http://www.apmath.spbu.ru/cnsa/`

2°. В пространстве $C^1[a,b]$ введём норму

$$\|x\|_1 = \max_{t\in[a,b]}\bigl|x(t)\bigr| + \max_{t\in[a,b]}\bigl|x'(t)\bigr|.$$

В докладе [1] показано, что естественная область определения Ω^{o} функционала $J(x)$ открыта в $C^1[a,b]$ в том смысле, что вместе с x_0 содержит при некотором $\delta > 0$ все функции вида $x_0 + h$ с $\|h\|_1 \leqslant \delta$. Там же установлено разложение

$$J(x_0 + h) = J(x_0) + \ell(x_0; h) + o\bigl(\|h\|_1\bigr), \tag{3}$$

где

$$l(x_0; h) = \int_a^b \Bigl[F'_x\bigl(t, x_0(t), x'_0(t)\bigr)h(t) + F'_{x'}\bigl(t, x_0(t), x'_0(t)\bigr)h'(t)\Bigr]dt \tag{4}$$

и $o\bigl(\|h\|_1\bigr)/\|h\|_1 \to 0$ при $\|h\|_1 \to 0$. Линейный по h функционал $\ell(x_0; h)$ определён при всех $h \in C^1[a,b]$. Он называется *первым дифференциалом функционала $J(x)$ в точке x_0* и обозначается $dJ(x_0; h)$.

3°. Вернёмся к задаче (1), (2) и введём множество

$$C_0^1[a,b] = \bigl\{h \in C^1[a,b] \mid h(a) = 0,\ h(b) = 0\bigr\}.$$

Ясно, что вместе с планом $x_0 \in \Omega$ множество Ω содержит функции вида $x_0 + \alpha h$ при всех $h \in C_0^1[a,b]$ и малых α.

План x_0 называется *точкой локального минимума* функционала $J(x)$, если при некотором $\delta > 0$ выполняется неравенство $J(x_0 + h) \geqslant J(x_0)$ для всех $h \in C_0^1[a,b]$, таких, что $\|h\|_1 \leqslant \delta$. Отсюда, в частности, следует, что в точке локального минимума

$$J(x_0 + \alpha h) \geqslant J(x_0) \tag{5}$$

для любой фиксированной функции $h \in C_0^1[a,b]$ и малых α.

Выясним, какими свойствами обладает точка локального минимума.

ТЕОРЕМА 1. *Если $x_0 \in \Omega$ — точка локального минимума функционала $J(x)$, то*

$$dJ(x_0; h) = 0 \quad \forall h \in C_0^1[a,b]. \tag{6}$$

Доказательство. При $h(t) \equiv 0$ равенство (6) тривиально (см. формулу (4)). Возьмём $h_0 \in C_0^1[a,b]$, $h_0(t) \not\equiv 0$ на $[a,b]$. Согласно (5) и (3) при малых $\alpha > 0$ имеем

$$\begin{aligned} 0 \leqslant J(x_0 + \alpha h_0) - J(x_0) = dJ(x_0; \alpha h_0) + o\bigl(\|\alpha h_0\|_1\bigr) = \\ = \alpha\Bigl[dJ(x_0; h_0) + \frac{o\bigl(\|\alpha h_0\|_1\bigr)}{\|\alpha h_0\|_1}\cdot \|h_0\|_1\Bigr]. \end{aligned}$$

Поделим это неравенство на $\alpha > 0$ и перейдём к пределу при $\alpha \to +0$. Получим $dJ(x_0; h_0) \geqslant 0$. Отметим, что вместе с h_0 множеству $C_0^1[a,b]$ принадлежит и $-h_0$. Значит, $dJ(x_0; -h_0) \geqslant 0$ или $-dJ(x_0; h_0) \geqslant 0$. Объединив два неравенства $dJ(x_0; h_0) \geqslant 0$ и $-dJ(x_0; h_0) \geqslant 0$, придём к равенству $dJ(x_0; h_0) = 0$.

Теорема доказана. □

4°. Формула (4) позволяет переписать условие (6) так:

$$\int_a^b \big[F'_x h + F'_{x'} h'\big]\,dt = 0 \quad \forall h \in C_0^1[a,b]. \tag{7}$$

Обозначим

$$u(t) = F'_{x'}\big(t, x_0(t), x'_0(t)\big), \quad v(t) = F'_x\big(t, x_0(t), x'_0(t)\big).$$

Тогда равенство (7) примет вид

$$\int_a^b \big[u(t)h'(t) + v(t)h(t)\big]\,dt = 0 \quad \forall h \in C_0^1[a,b]. \tag{8}$$

Воспользуемся основной леммой вариационного исчисления (см. например [2]), согласно которой условие (8) выполняется тогда и только тогда, когда $u \in C^1[a,b]$ и $u'(t) = v(t)$ на $[a,b]$. Придём к следующему заключению.

ТЕОРЕМА 2. *Если $x_0 \in \Omega$ — точка локального минимума функционала $J(x)$, то необходимо*

1) $u(t) := F'_{x'}\big(t, x_0(t), x'_0(t)\big) \in C^1[a,b]$;

2) $\frac{d}{dt}F'_{x'}\big(t, x_0(t), x'_0(t)\big) = F'_x\big(t, x_0(t), x'_0(t)\big)$ *при всех* $t \in [a,b]$.

Получили необходимые условия оптимальности первого порядка. Их смысл в том, что точка локального минимума функционала $J(x)$ является решением краевой задачи

$$\frac{d}{dt}F'_{x'}\big(t, x(t), x'(t)\big) = F'_x\big(t, x(t), x'(t)\big), \tag{9}$$

$$x(a) = A, \quad x(b) = B. \tag{10}$$

Дифференциальное уравнение (9) называется *уравнением Эйлера*.

Введём ещё два понятия:

- *экстремаль* — любая функция класса $C^1[a,b]$, удовлетворяющая уравнению Эйлера;

- *стационарная кривая* — экстремаль, удовлетворяющая краевым условиям (10).

Обычно ищут стационарную кривую, после чего пытаются доказать, что она является либо решением задачи (1), (2), либо, по крайней мере, точкой локального минимума функционала $J(x)$. Следует отметить также принципиальный факт: если решение задачи (1), (2) существует и стационарная кривая единственна, то эта стационарная кривая будет единственным решением задачи (1), (2).

5°. Возьмём произвольную экстремаль $x = x(t)$. В случае, когда $F \in C^2(U)$ и $x \in C^2[a,b]$, можно записать

$$\frac{d}{dt}F'_{x'} = F''_{x't} + F''_{x'x}\,x' + F''_{x'x'}\,x''.$$

Таким образом, при указанных условиях экстремаль удовлетворяет дифференциальному уравнению второго порядка

$$F''_{x'x'}\,x'' = F'_x - F''_{x't} - F''_{x'x}\,x'.$$

Однако экстремаль может не принадлежать классу $C^2[a,b]$. Соответствующий пример приведён в докладе [3]. Ясность в этом вопросе наводит следующее утверждение.

ТЕОРЕМА ГИЛЬБЕРТА О ДИФФЕРЕНЦИРУЕМОСТИ. *Пусть $F \in C^2(U)$. Тогда экстремаль $x_0(t)$ дважды непрерывно дифференцируема на множестве*

$$T = \Big\{t \in [a,b] \mid F''_{x'x'}\big(t, x_0(t), x_0'(t)\big) \neq 0\Big\}.$$

Доказательство. Зафиксируем точку $t_0 \in T$. Равенство (9), определяющее экстремаль, представляет собой формулу для производной по t функции $F'_{x'}\big(t, x_0(t), x_0'(t)\big)$. По определению производной разностное отношение

$$\frac{1}{\Delta t}\Big[F'_{x'}\big(t_0+\Delta t, x_0(t_0+\Delta t), x_0'(t_0+\Delta t)\big) - F'_{x'}\big(t_0, x_0(t_0), x_0'(t_0)\big)\Big] \tag{11}$$

при $\Delta t \to 0$ имеет предел, равный $F'_x\big(t_0, x_0(t_0), x_0'(t_0)\big)$. Воспользуемся теоремой о среднем, согласно которой выражение (11) допускает представление

$$\tilde F''_{x't} + \tilde F''_{x'x}\frac{x_0(t_0+\Delta t) - x_0(t_0)}{\Delta t} + \tilde F''_{x'x'}\frac{x_0'(t_0+\Delta t) - x_0'(t_0)}{\Delta t}, \tag{12}$$

где $\tilde F''_{x't}$, $\tilde F''_{x'x}$, $\tilde F''_{x'x'}$ суть частные производные $F''_{x't}$, $F''_{x'x}$, $F''_{x'x'}$, вычисленные в средней точке

$$\Big(t_0+\theta\Delta t, x_0(t_0) + \theta\big(x_0(t_0+\Delta t) - x_0(t_0)\big),\ x_0'(t_0) + \theta\big(x_0'(t_0+\Delta t) - x_0'(t_0)\big)\Big).$$

Так как $t_0 \in T$, то $\tilde F''_{x'x'} \neq 0$ при малых Δt.

Запишем очевидное равенство

$$\frac{x_0'(t_0+\Delta t)-x_0'(t_0)}{\Delta t}=\frac{1}{\tilde F''_{x'x'}}\Big[\tilde F''_{x'x'}\frac{x_0'(t_0+\Delta t)-x_0'(t_0)}{\Delta t}+$$

$$+\tilde F''_{x'x}\frac{x_0(t_0+\Delta t)-x_0(t_0)}{\Delta t}+\tilde F''_{x't}\Big]-\frac{1}{\tilde F''_{x'x'}}\Big[\tilde F''_{x'x}\frac{x_0(t_0+\Delta t)-x_0(t_0)}{\Delta t}+\tilde F''_{x't}\Big].$$

В первой квадратной скобке из первой части этого равенства стоит выражение (12), которое имеет предел при $\Delta t\to 0$. Имеет предел и выражение, стоящее во второй квадратной скобке. Отсюда следует, что экстремаль $x_0(t)$ имеет вторую производную в точке $t=t_0$, причём

$$x_0''(t_0)=\frac{1}{F''_{x'x'}}\Big[F'_x-F''_{x'x}\,x_0'(t_0)-F''_{x't}\Big]. \tag{13}$$

Частные производные функции F вычисляются в точке $\big(t_0,x_0(t_0),x_0'(t_0)\big)$.

Правая часть формулы (13) непрерывна на T. Значит, $x_0\in C^2(T)$.

Теорема доказана. $\square$

С л е д с т в и е. Пусть на экстремали x_0 выполняется условие

$$F''_{x'x'}\big(t_0,x_0(t_0),x_0'(t_0)\big)\neq 0\quad \forall t\in[a,b].$$

Тогда $x_0\in C^2[a,b]$.

6°. В связи с теоремой Гильберта вводятся следующие определения.

Функционал $J(x)$ вида (1) с $F\in C^2(U)$ называется

- *регулярным*, если $F''_{x'x'}(t,x,y)\neq 0$ на U;
- *положительно регулярным*, если $F''_{x'x'}(t,x,y)>0$ на U;
- *отрицательно регулярным*, если $F''_{x'x'}(t,x,y)<0$ на U.

У регулярного функционала все экстремали принадлежат классу $C^2[a,b]$. Положительно регулярный функционал появляется, например, в задаче о минимальной поверхности вращения (см. доклад [4]).

7°. Сделаем замечание общего характера. Пусть $x\in C^2[a,b]$. Тогда

$$\frac{d}{dt}\big(F-x'F'_{x'}\big)=\big(F'_t+F'_x\,x'+F'_{x'}x''\big)-\big(x''F'_{x'}-x'\frac{d}{dt}F'_{x'}\big)=$$

$$=F'_t-x'\left(\frac{d}{dt}F'_{x'}-F'_x\right).$$

Отсюда следует, что решение краевой задачи

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\big(F - x'F'_{x'}\big) = F'_t,\\
&x(a) = A, \quad x(b) = B,
\end{aligned} \tag{14}$$

принадлежащее $C^2[a,b]$, у которого производная обращается в ноль лишь в конечном числе точек отрезка $[a,b]$, является стационарной кривой.

В случае $F = F(x, x')$ задача (14) принимает вид

$$\begin{aligned}
&F - x'F'_{x'} \equiv \mathrm{const},\\
&x(a) = A, \quad x(b) = B.
\end{aligned} \tag{15}$$

Отметим, что нелинейное дифференциальное уравнение (15) имеет первый порядок.

8°. Переходим к необходимым условиям оптимальности второго порядка. Предположим, что $F \in C^2(U)$. Возьмём $x_0 \in \Omega^{\mathrm{o}}$ и воспользуемся тем, что функционал $J(x)$ вида (1) допускает разложение (см. [1])

$$J(x_0 + h) = J(x_0) + dJ(x_0; h) + \tfrac{1}{2} D(x_0; h) + o\big(\|h\|_1^2\big), \tag{16}$$

где

$$D(x_0; h) = \int_a^b \big[F''_{xx} h^2 + 2F''_{xx'} hh' + F''_{x'x'} (h')^2\big] dt \tag{17}$$

(частные производные функции F вычисляются в точке $\big(t, x_0(t), x_0'(t)\big)$) и $o\big(\|h\|_1^2\big)/\|h\|_1^2 \to 0$ при $\|h\|_1 \to 0$. Интегральная квадратичная форма $D(x_0; h)$ определена при всех $h \in C^1[a,b]$. Она называется *вторым дифференциалом функционала* $J(x)$ *в точке* x_0 и обозначается $d^2 J(x_0; h)$.

ТЕОРЕМА 3. *Если $x_0 \in \Omega$ — точка локального минимума функционала $J(x)$, то*

$$d^2 J(x_0; h) \geqslant 0 \quad \forall h \in C_0^1[a,b]. \tag{18}$$

Доказательство. При $h(t) \equiv 0$ равенство (18) очевидно (см. формулу (17)). Возьмём $h_0 \in C_0^1[a,b]$, $h_0(t) \not\equiv 0$ на $[a,b]$. По теореме 1, $dJ(x_0, h_0) = 0$. При малых ненулевых α функция $x_0 + \alpha h_0$ является планом задачи (1), (2). Согласно (16),

$$\begin{aligned}
0 \leqslant J(x_0 + \alpha h_0) - J(x_0) &= \tfrac{1}{2} D(x_0; \alpha h_0) + o\big(\|\alpha h_0\|_1^2\big) = \\
&= \alpha^2 \Big[\tfrac{1}{2} D(x_0; h_0) + \frac{o\big(\|\alpha h_0\|_1^2\big)}{\|\alpha h_0\|_1^2} \cdot \|h_0\|_1^2\Big].
\end{aligned}$$

Поделим это неравенство на α^2, после чего перейдём к пределу при $\alpha \to 0$. Получим $\frac{1}{2} D(x_0; h_0) \geqslant 0$, что равносильно (18). $\square$

Получили необходимое условие оптимальности второго порядка. Оно заключается в том, что в точке локального минимума x_0 функционала $J(x)$ интегральная квадратичная форма $D(x_0;h)$ должна быть неотрицательно определённой на множестве $C_0^1[a,b]$.

9°. Вопрос о неотрицательной определённости интегральной квадратичной формы вида

$$D(h) = \int_a^b \big[p(h')^2 + qh^2\big]\,dt, \quad h \in C_0^1[a,b], \tag{19}$$

рассматривался в докладе [2]. Там приведено доказательство критерия неотрицательной определённости при следующих предположениях:

$$p \in C^1[a,b], \quad q \in C[a,b], \quad p(t) > 0 \text{ на } [a,b]. \tag{20}$$

В формулировке критерия участвует функция $h_0(t)$ — решение дифференциального уравнения

$$(ph')' = qh, \tag{21}$$

удовлетворяющее начальным условиям

$$h(a) = 0, \quad h'(a) = 1.$$

Уравнение (21) называется *уравнением Якоби*, а функция $h_0(t)$ — *главным решением уравнения Якоби.*

Напомним формулировку критерия неотрицательной определённости.

ТЕОРЕМА ЯКОБИ. *В предположениях* (20) *квадратичная форма* $D(h)$ *вида* (19) *неотрицательно определена на* $C_0^1[a,b]$ *тогда и только тогда, когда главное решение уравнения Якоби положительно на интервале* (a,b).

10°. Чтобы применить теорему Якоби к форме $D(x_0;h)$, нужно сначала привести эту форму к каноническому виду (19). Обозначим

$$p(t) = F''_{x'x'}\big(t, x_0(t), x_0'(t)\big), \ u(t) = F''_{xx'}\big(t, x_0(t), x_0'(t)\big), \ v(t) = F''_{xx}\big(t, x_0(t), x_0'(t)\big).$$

В силу (17)

$$D(x_0;h) = \int_a^b \big[p(h')^2 + 2uhh' + vh^2\big]\,dt. \tag{22}$$

Предположим, что $p(t) > 0$ на $[a,b]$, то есть

$$F''_{x'x'}\big(t, x_0(t), x_0'(t)\big) > 0 \quad \forall t \in [a,b].$$

В этом случае по теореме Гильберта о дифференцируемости стационарная кривая $x_0(t)$ принадлежит классу $C^2[a,b]$. В частности, при $F \in C^3(U)$ функции $p(t)$ и $u(t)$ непрерывно дифференцируемы на $[a,b]$.

Для любой функции $h \in C_0^1[a,b]$ имеем

$$2\int_a^b uhh'dt = \int_a^b udh^2 = -\int_a^b u'h^2dt.$$

Обозначим $q = v - u'$ и перепишем формулу (22) в терминах p и q:

$$D(x_0;h) = \int_a^b \big[p(h')^2 + qh^2\big]dt.$$

Квадратичная форма $D(x_0;h)$ приведена к каноническому виду, причём выполнены условия (20).

На основании теоремы 3 и теоремы Якоби приходим к следующему заключению.

ТЕОРЕМА 4. *Пусть $F \in C^3(U)$. Если $x_0 \in \Omega$ — точка локального минимума функционала $J(x)$ и*

$$F''_{x'x'}\big(t, x_0(t), x_0'(t)\big) > 0 \quad \forall t \in [a,b],$$

то функция $h_0(t)$, удовлетворяющая дифференциальному уравнению

$$(ph')' = (v - u')h \tag{23}$$

и начальным условиям $h(a) = 0$, $h'(a) = 1$, положительна на интервале (a,b).

Это другая форма необходимого условия оптимальности второго порядка.

11°. В некоторых случаях функцию $h_0(t)$ из теоремы 4 можно построить даже не выписывая уравнение Якоби (23), а используя только уравнение Эйлера.

Сохранив предположение $F \in C^3(U)$, рассмотрим параметрическую задачу Коши для уравнения Эйлера

$$\begin{gathered}\frac{d}{dt}F'_{x'}\big(t, x(t), x'(t)\big) = F'_x\big(t, x(t), x'(t)\big),\\ x(a) = A, \quad x'(a) = \alpha.\end{gathered} \tag{24}$$

Здесь α — параметр. Пусть при $\alpha = \alpha_0$ решением задачи (24) является стационарная кривая $x_0(t)$. В общем случае решение задачи (24) обозначим через $x(t,\alpha)$. В частности, $x(t,\alpha_0) = x_0(t)$.

Дальнейшее справедливо лишь тогда, когда функция двух переменных $x(t,\alpha)$ трижды непрерывно дифференцируема на множестве

$$[a,b] \times (\alpha_0 - \varepsilon, \alpha_0 + \varepsilon)$$

при некотором $\varepsilon > 0$.

Подставив в (24) $x(t,\alpha)$ вместо $x(t)$, получим тождества по α. Продифференцируем первое из них по α, после чего подставим $\alpha = \alpha_0$. Придём к соотношению

$$\frac{d}{dt}\big[F''_{x'x}\cdot x'_\alpha(t,\alpha_0) + F''_{x'x'}\cdot x''_{t\alpha}(t,\alpha_0)\big] = F''_{xx}\cdot x'_\alpha(t,\alpha_0) + F''_{xx'}\cdot x''_{t\alpha}(t,\alpha_0)$$

(частные производные функции F вычисляются в точке $\big(t, x_0(t), x'_0(t)\big)$). Воспользуемся принятыми ранее обозначениями и перепишем последнее равенство в виде

$$\frac{d}{dt}[ux'_\alpha + px''_{t\alpha}] = vx'_\alpha + ux''_{t\alpha}.$$

Так как

$$\frac{d}{dt}(ux'_\alpha) = u'x'_\alpha + ux''_{\alpha t}$$

и $x''_{\alpha t}(t,x_0) = x''_{t\alpha}(t,x_0)$, то

$$\frac{d}{dt}(px''_{\alpha t}) = (v-u')x'_\alpha. \tag{25}$$

Обозначим

$$h_0(t) = x'_\alpha(t,\alpha_0). \tag{26}$$

Согласно (25)

$$(ph'_0)' = (v-u')h_0,$$

то есть функция h_0 удовлетворяет уравнению Якоби (23).

Теперь обратимся к тождествам

$$x(a,\alpha) = A, \quad x'_t(a,\alpha) = \alpha.$$

Продифференцируем их по α, после чего подставим $\alpha = \alpha_0$. Получим

$$x'_\alpha(a,\alpha_0) = 0, \quad x''_{t\alpha}(a,\alpha_0) = 1$$

или в других обозначениях $h_0(a) = 0$, $h'_0(a) = 1$.

Таким образом, функция $h_0(t)$ вида (26) удовлетворяет всем условиям из теоремы 4.

12°. В качестве примера рассмотрим вариационную задачу

$$\begin{gathered} J(x) := \int_0^1 \frac{x}{(x')^2}dt \to \inf \\ x(0) = 1, \quad x(1) = 4. \end{gathered} \tag{27}$$

Построим стационарную кривую для этой задачи и проверим выполнение на ней необходимого условия оптимальности второго порядка.

В данном случае $F(t,x,y) = x/y^2$. Функция F определена при $y \neq 0$. Принимая во внимание краевые условия, открытое линейно связное множество U введём следующим образом:

$$U = \big\{(t,x,y) \mid x > 0,\ y > 0\big\}.$$

Очевидно, что $F \in C^3(U)$.

Вычислим частные производные:

$$F'_x = \frac{1}{y^2}, \quad F'_y = -\frac{2x}{y^3}, \quad F''_{yy} = \frac{6x}{y^4}.$$

Так как $F''_{yy} > 0$ на U, то функционал $J(x)$ положительно регулярный. По теореме Гильберта о дифференцируемости все экстремали задачи (27) принадлежат классу $C^2[0,1]$.

Функция F не зависит явно от t. Это позволяет записать уравнение Эйлера в виде (15):

$$\frac{x}{(x')^2} + x'\frac{2x}{(x')^3} = \frac{3}{4a^2} \qquad (a > 0)$$

или $4a^2x = (x')^2$. В соответствии с определением множества U мы ищем экстремали со свойствами $x > 0$, $x' > 0$. Приходим к дифференциальному уравнению

$$x' = 2a\sqrt{x}.$$

Его решением является двухпараметрическое семейство функций

$$x(t) = (at+b)^2 \tag{28}$$

при $a > 0$. Коэффициенты a и b найдём из граничных условий

$$b^2 = 1, \quad (a+b)^2 = 4.$$

При $b = 1$ получаем положительное $a = 1$. При $b = -1$ будет $a = 3$.

Таким образом, выделены две функции (см. рис.)

$$x_0(t) = (t+1)^2, \quad x_1(t) = (3t-1)^2.$$

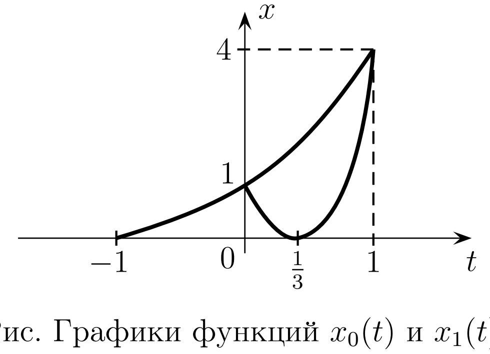

Рис. Графики функций $x_0(t)$ и $x_1(t)$.

Функция $x_1(t)$ — побочная. У неё производная обращается в ноль при $t = \frac{1}{3}$. Что касается функции $x_0(t)$, то она принадлежит классу $C^2[0,1]$ и её производная не обращается в ноль на отрезке $[0,1]$. Это гарантирует стационарность $x_0(t)$ (см. п. 7°). Покажем, что на x_0 выполняется необходимое условие оптимальности второго порядка.

В двухпараметрическом семействе экстремалей (28) выделим однопараметрическое семейство, удовлетворяющее начальным условиям

$$x(0) = 1, \quad x'(0) = \alpha.$$

Данные условия приводят к равенствам $b^2 = 1$, $2ab = \alpha$. Учитывая их, записываем

$$x(t,\alpha) = \Big(\frac{\alpha}{2b}t + b\Big)^2 = b^2\Big(\frac{\alpha}{2b^2}t + 1\Big)^2 = \Big(\frac{\alpha}{2}t + 1\Big)^2.$$

Стационарная кривая x_0 получается при $\alpha = 2$, то есть $\alpha_0 = 2$. Согласно (26)

$$h_0(t) = x'_\alpha(t,\alpha_0) = t(t+1).$$

Очевидно, что $h_0(t) > 0$ при всех $t \in (0,1)$. Это и требовалось установить.

Вычислим значение функционала $J(x)$ на стационарной кривой x_0:

$$J(x_0) = \int_0^1 \frac{(t+1)^2}{4(t+1)^2}dt = \frac{1}{4}.$$

Вместе с тем, на побочной кривой x_1, являющейся планом задачи (27), имеем

$$J(x_1) = \int_0^1 \frac{(3t-1)^2}{3t(3t-1)^2}dt = \frac{1}{36},$$

то есть $J(x_1)$ в девять раз меньше, чем $J(x_0)$! К сожалению, кривая x_1 находится вне теории. На ней подынтегральная функция F имеет устранимую особенность.

ЛИТЕРАТУРА

1. Малозёмов В. Н. *Первый и второй дифференциалы интегрального функционала* // Семинар «DHA & CAGD». Избранные доклады. 5 декабря 2013 г. (`http://dha.spb.ru/reps13.shtml#1205`)

2. Малозёмов В. Н. *Квадратичные вариационные задачи* // Вестник молодых учёных. Прикл. мат. и мех. 2000. № 3. С. 12–22.

3. Малозёмов В. Н., Тамасян Г. Ш. *Об одной кубической вариационной задаче* // Семинар «CNSA & NDO». Избранные доклады. 11 февраля 2016 г. (`http://apmath.spbu.ru/cnsa/reps16.shtml#0211`)

4. Малозёмов В. Н. *О минимальной поверхности вращения* // Вестник СПбГУ. Сер. 10. 2006. Вып. 1. С. 52–56.