# КВАДРАТИЧНЫЕ ВАРИАЦИОННЫЕ ЗАДАЧИ*

В. Н. Малозёмов

**Аннотация.** Эта статья написана на основе трёх лекций, которые автор прочитал в университете Калабрии (Италия) в мае 1999 г. по приглашению проф. Манлио Гаудиозо. Статья представляет собой нестандартное введение в вариационное исчисление, математически строгое и согласованное в идейном плане с теорией конечномерных экстремальных задач.

## 1°. Постановка задачи. Критерий оптимальности

**1.1.** Обозначим через $C[a,b]$ и $C^1[a,b]$ линейные пространства непрерывных и непрерывно дифференцируемых на отрезке $[a,b]$ функций соответственно. Зафиксируем функции $p$, $q$, $f$ из $C[a,b]$ и определим на $C^1[a,b]$ *интегральный квадратичный функционал в канонической форме*:

$$Q(x) = \int_a^b \Big\{ p(t)\big[x'(t)\big]^2 + q(t)\big[x(t)\big]^2 - 2f(t)x(t) \Big\} dt.$$

Нас интересует квадратичная вариационная задача следующего вида:

$$\begin{gathered} Q(x) \to \inf, \\ x(a) = A, \quad x(b) = B, \quad x \in C^1[a,b]. \end{gathered} \tag{1}$$

Функцию $x$, удовлетворяющую ограничениям задачи (1), назовём её *планом.* Множество планов обозначим через $\Omega$. Решение $x_*$ задачи (1) характеризуется тем, что $x_* \in \Omega$ и $Q(x) \geqslant Q(x_*)$ для всех $x \in \Omega$. Решение будем называть также *оптимальным планом.*

**1.2.** Введём *множество допустимых вариаций*

$$C_0^1[a,b] = \big\{ h \in C^1[a,b] \mid h(a) = h(b) = 0 \big\}.$$

Очевидно, что из условий $x \in \Omega$, $h \in C_0^1[a,b]$ следует, что $x + \alpha h \in \Omega$ при всех вещественных $\alpha$.

*Журнал «Вестник молодых учёных. Прикл. мат. и мех.». 2000. № 3. С. 12–22.

Запишем разложение

$$
\begin{aligned}
Q(x+\alpha h) &= \int_a^b \big\{p(x'+\alpha h')^2 + q(x+\alpha h)^2 - 2f\cdot(x+\alpha h)\big\}dt = \\
&= Q(x) + 2\alpha\int_a^b \big\{px'h' + (qx-f)h\big\}dt + \alpha^2\int_a^b \big\{p(h')^2 + qh^2\big\}dt.
\end{aligned}
$$

Обозначим

$$
l(x;h) = \int_a^b \big\{px'h' + (qx-f)h\big\}dt,
$$

$$
D(h) = \int_a^b \big\{p(h')^2 + qh^2\big\}dt.
$$

Тогда

$$
Q(x+\alpha h) = Q(x) + 2\alpha\, l(x;h) + \alpha^2 D(h). \tag{2}
$$

**ЛЕММА 1.** *Если существует допустимая вариация $h_0$, для которой $D(h_0) < 0$, то*

$$
\inf_{x\in\Omega} Q(x) = -\infty. \tag{3}
$$

Доказательство. Возьмём произвольный план $x_0$. Согласно (2) выражение $Q(x_0+\alpha h_0)$ представляет собой квадратичный трёхчлен относительно $\alpha$ с отрицательным старшим коэффициентом. Понятно, что $Q(x_0+\alpha h_0)\to -\infty$ при $\alpha\to\infty$, откуда и следует (3). $\square$

Таким образом, задача (1) содержательна только при условии

$$
D(h) \geqslant 0 \quad \forall h \in C_0^1[a,b], \tag{4}
$$

то есть когда интегральная квадратичная форма $D(h)$ *неотрицательно определена* на $C_0^1[a,b]$. В дальнейшем это условие будем считать выполненным.

**1.3.** Разложение (2) и условие (4) позволяют легко получить критерий оптимальности.

**ТЕОРЕМА 1.** *Для того чтобы план $x_*$ задачи* (1) *был оптимальным, необходимо и достаточно, чтобы*

$$
l(x_*;h) = 0 \quad \forall h \in C_0^1[a,b]. \tag{5}
$$

Доказательство. Необходимость. Возьмём допустимую вариацию $h$. Поскольку $x_*$ — точка минимума $Q(x)$ на $\Omega$, то

$$
0 \leqslant Q(x_*+\alpha h) - Q(x_*) = 2\alpha\, l(x_*;h) + \alpha^2 D(h).
$$

Поделим это неравенство на $\alpha > 0$ и перейдём к пределу при $\alpha \to +0$. Получим $l(x_*; h) \geqslant 0$. Отметим, что вместе с $h$ допустимой вариацией является и $-h$. По доказанному $l(x_*; -h) \geqslant 0$, или $-l(x_*; h) \geqslant 0$. Объединяя два неравенства $l(x_*; h) \geqslant 0$ и $-l(x_*; h) \geqslant 0$, приходим к равенству (5).

Достаточность. Возьмём любой план $x$ и положим $h = x - x_*$. Очевидно, что $h \in C_0^1[a, b]$. Солаcно (2), (5) и (4) имеем

$$Q(x) = Q(x_* + h) = Q(x_*) + D(h) \geqslant Q(x_*).$$

Теорема доказана. □

**1.4.** Теперь в критерии оптимальности (5) нужно избавиться от $h$ (переформулировать его в терминах функций $p$, $q$ и $f$). Для этого потребуется некоторая подготовка.

**ЛЕММА 2.** *Пусть $u \in C[a, b]$. Если*

$$\int_a^b u(t)h'(t)dt = 0 \quad \forall h \in C_0^1[a, b],$$

*то $u(t) \equiv \mathrm{const}$ на $[a, b]$.*

Доказательство. Положим $u_1(t) = \int_a^t u(\tau)d\tau$ и введём линейную функцию $p_1(t) = c_0 t + c_1$, интерполирующую $u_1(t)$ в точках $t = a$ и $t = b$:

$$p_1(a) = u_1(a), \quad p_1(b) = u_1(b).$$

Разность $h_1(t) = u_1(t) - p_1(t)$ является допустимой вариацией, причём $h_1'(t) = u(t) - c_0$.

Имеем

$$\int_a^b \big[u(t) - c_0\big]^2 dt = \int_a^b \big[u(t) - c_0\big] h_1'(t)dt = \\ = \int_a^b u(t)h_1'(t)dt - c_0 \int_a^b h_1'(t)dt = \int_a^b u(t)h_1'(t)dt.$$

Последний интеграл в силу условия леммы равен нулю, так что

$$\int_a^b \big[u(t) - c_0\big]^2 dt = 0.$$

Отсюда очевидным образом следует требуемое. □

**ОСНОВНАЯ ЛЕММА ВАРИАЦИОННОГО ИСЧИСЛЕНИЯ.** *Пусть функции $u$, $v$ принадлежат $C[a,b]$. Для того чтобы выполнялось равенство*

$$\int_a^b \big[u(t)h'(t) + v(t)h(t)\big]\,dt = 0 \quad \forall h \in C_0^1[a,b], \tag{6}$$

*необходимо и достаточно, чтобы*

$$u \in C^1[a,b] \quad \text{и} \quad u'(t) \equiv v(t) \quad \text{на} \quad [a,b].$$

Доказательство. Необходимость. Положим $v_1(t) = \int_a^t v(\tau)d\tau$. При $h \in C_0^1[a,b]$ имеем

$$\int_a^b v(t)h(t)dt = \int_a^b v_1'(t)h(t)dt = v_1(t)h(t)\Big|_a^b - \int_a^b v_1(t)h'(t)dt = \\ = -\int_a^b v_1(t)h'(t)dt.$$

Условие (6) принимает вид

$$\int_a^b \big[u(t) - v_1(t)\big]h'(t)dt = 0 \quad \forall h \in C_0^1[a,b].$$

По лемме 2, $u(t) - v_1(t) \equiv \mathrm{const}$ или

$$u(t) \equiv v_1(t) + \mathrm{const} \quad \text{на} \quad [a,b].$$

Отсюда следует и непрерывная дифференцируемость функции $u(t)$, и тождество $u'(t) \equiv v(t)$ на $[a,b]$.

Достаточность. При $h \in C_0^1[a,b]$ имеем

$$\int_a^b \big[u(t)h'(t) + v(t)h(t)\big]dt = \int_a^b \big[u(t)h'(t) + u'(t)h(t)\big]dt = \\ = \int_a^b \big[u(t)h(t)\big]'dt = u(t)h(t)\Big|_a^b = 0,$$

что и требовалось доказать. □

**1.5.** Вернёмся к критерию оптимальности (5) и перепишем его в развёрнутом виде:

$$\int_a^b \big\{px_*'h' + (qx_* - f)h\big\}dt = 0 \quad \forall h \in C_0^1[a,b]. \tag{7}$$

**ТЕОРЕМА 2.** *Для того чтобы план $x_*$ задачи* (1) *был оптимальным, необходимо и достаточно, чтобы $px_*' \in C^1[a,b]$ и*

$$-(px_*') + qx_* = f \quad \text{на} \quad [a,b]. \tag{8}$$

Доказательство непосредственно следует из теоремы 1 и основной леммы вариационного исчисления при $u(t) = p(t)x_*'(t)$, $v(t) = q(t)x_*(t) - f(t)$. □

Установлено, что решение задачи (1) сводится к решению краевой задачи

$$\begin{gathered} \mathfrak{L}(x;t) := -\frac{d}{dt}\left(p\frac{dx}{dt}\right) + qx = f, \\ x(a) = A, \quad x(b) = B. \end{gathered} \tag{9}$$

Дифференциальный оператор $\mathfrak{L}(x;t)$ называется *оператором Штурма–Лиувилля.*

**1.6.** Напомним, что теорема 2 справедлива при выполнении условия (4), которое в развёрнутом виде выглядит так:

$$\int_a^b \left\{p(h')^2 + qh^2\right\}dt \geqslant 0 \quad \forall h \in C_0^1[a,b]. \tag{10}$$

Избавиться в этом условии от $h$ (переформулировать его в терминах $p$ и $q$) — непростая задача, решению которой посвящён следующий раздел. Пока же отметим, что неравенство (10) очевидно выполняется, если функции $p(t)$ и $q(t)$ неотрицательны на $[a,b]$.

Менее тривиальным является следующее утверждение.

**ТЕОРЕМА 3.** *Если $D(h) \geqslant 0$ на $C_0^1[a,b]$, то необходимо*

$$p(t) \geqslant 0 \quad \text{на} \quad [a,b]. \tag{11}$$

Доказательство. Допустим противное. Тогда найдётся точка $t_0 \in (a,b)$, в которой $p(t_0) < 0$. Положим $\varepsilon_0 = -p(t_0)/2$ и выберем $\delta_0 > 0$ так, чтобы $[t_0-\delta_0, t_0+\delta_0] \subset (a,b)$ и $\bigl|p(t) - p(t_0)\bigr| \leqslant \varepsilon_0$ при $t \in [t_0-\delta_0, t_0+\delta_0]$. В этом случае $p(t) \leqslant p(t_0) + \varepsilon_0 = -\varepsilon_0$, то есть

$$p(t) \leqslant -\varepsilon_0 \quad \text{на} \quad [t_0-\delta_0, t_0+\delta_0]. \tag{12}$$

При $\delta \in (0, \delta_0]$ введём вариацию

$$h_\delta(t) = \begin{cases} \sqrt{\frac{\delta}{\pi}}\Bigl[1 + \cos\bigl(\frac{\pi}{\delta}(t-t_0)\bigr)\Bigr], & \text{если } t \in [t_0-\delta, t_0+\delta], \\ 0 & \text{при остальных } t \in [a,b]. \end{cases}$$

Поскольку $h'_\delta(t) = -\sqrt{\frac{\pi}{\delta}}\sin\bigl(\frac{\pi}{\delta}(t-t_0)\bigr)$ при $t \in [t_0-\delta, t_0+\delta]$, то $h_\delta \in C_0^1[a,b]$. Кроме того,

$$0 \leqslant h_\delta(t) \leqslant 2\sqrt{\tfrac{\delta}{\pi}} \quad \text{на} \quad [a,b]. \tag{13}$$

Согласно (12) и (13) имеем

$$D(h_\delta) = \int\limits_{t_0-\delta}^{t_0+\delta} \bigl\{p(h'_\delta)^2 + qh_\delta^2\bigr\}dt \leqslant -\varepsilon_0\frac{\pi}{\delta}\int\limits_{t_0-\delta}^{t_0+\delta}\sin^2\bigl(\tfrac{\pi}{\delta}(t-t_0)\bigr)dt+$$
$$+\frac{4\delta}{\pi}\int_a^b\bigl|q(t)\bigr|dt = -\varepsilon_0\int_{-\pi}^{\pi}\sin^2(\tau)d\tau + \frac{4\delta}{\pi}\int_a^b\bigl|q(t)\bigr|dt.$$

Очевидно, что $D(h_\delta) < 0$ при малых $\delta > 0$. Но это противоречит предположению о неотрицательности $D(h)$ на $C_0^1[a,b]$. Теорема доказана. □

**1.7.** Условие (11) называется *условием Лежандра.* Оно необходимо для неотрицательной определенности $D(h)$ на $C_0^1[a,b]$, но не достаточно. Более того, даже *усиленное условие Лежандра* $p(t) > 0$ на $[a,b]$ не гарантирует неотрицательной определенности $D(h)$ на $C_0^1[a,b]$.

**ПРИМЕР.** Возьмём

$$D_\lambda(h) = \int_0^\pi \bigl\{(h')^2 - \lambda h^2\bigr\}dt, \quad h \in C_0^1[0,\pi].$$

Здесь $p(t) \equiv 1$ — усиленное условие Лежандра выполнено. Вместе с тем, на допустимой вариации $h_0(t) = \sin(t)$ имеем

$$D_\lambda(h_0) = \int_0^\pi \bigl\{\cos^2(t) - \lambda\sin^2(t)\bigr\}dt = \frac{\pi}{2}(1-\lambda),$$

так что при $\lambda > 1$ интегральная квадратичная форма $D_\lambda(h)$ не является неотрицательно определенной на $C_0^1[0,\pi]$.

## 2°. Критерий неотрицательной определённости интегральной квадратичной формы

**2.1.** Будем исследовать интегральную квадратичную форму

$$D(h) = \int_a^b \bigl\{p(h')^2 + qh^2\bigr\}dt, \quad h \in C_0^1[a,b],$$

при следующих предположениях

$$q \in C[a,b], \quad p \in C^1[a,b], \quad p(t) > 0 \quad \text{на} \quad [a,b]. \tag{14}$$

Рассмотрим на $[a,b]$ дифференциальное уравнение

$$(ph')' = qh. \tag{15}$$

Учитывая (14), перепишем его в виде $ph''+p'h'-qh=0$, или, что равносильно,

$$h'' + \frac{p'}{p}h' - \frac{q}{p}h = 0. \tag{16}$$

Уравнение (16) называется *уравнением Якоби.* Это однородное дифференциальное уравнение второго порядка, разрешённое относительно старшей производной, с непрерывными на $[a,b]$ коэффициентами. Из теории обыкновенных дифференциальных уравнений известно, что такое уравнение имеет единственное на $[a,b]$ решение при любых начальных условиях вида $h(c)=A$, $h'(c)=A'$, где $c\in[a,b]$. Назовём *главным решением уравнения Якоби* то решение $h_0(t)$, у которого

$$h_0(a)=0, \quad h_0'(a)=1. \tag{17}$$

**ТЕОРЕМА ЯКОБИ.** *Пусть выполнены условия* (14). *Для того чтобы квадратичная форма $D(h)$ была неотрицательно определённой на $C_0^1[a,b]$, необходимо и достаточно, чтобы главное решение уравнения Якоби $h_0(t)$ было положительным на $(a,b)$.*

**2.2.** Доказательство. Достаточность. Допустим, что $h_0(t)>0$ на $(a,b)$. Покажем, что

$$D(h) = \int_a^b p\big(h' - \frac{h}{h_0}h_0'\big)^2 dt \qquad \forall h\in C_0^1[a,b]. \tag{18}$$

Отметим прежде всего, что функция $h/h_0$ непрерывна на $[a,b]$. Действительно, по правилу Лопиталя для $h\in C_0^1[a,b]$ имеем

$$\lim_{t\to a+0}\frac{h(t)}{h_0(t)} = \lim_{t\to a+0}\frac{h'(t)}{h_0'(t)} = h'(a).$$

Далее, предел дроби $h(t)/h_0(t)$ при $t\to b-0$ равен нулю, если $h_0(b)>0$. Если же $h_0(b)=0$, то $h_0'(b)\neq 0$ [иначе $h_0(t)\equiv 0$ в силу единственности решения уравнения Якоби с начальными условиями $h_0(b)=0$, $h_0'(b)=0$, что противоречит (17)]. В этом случае

$$\lim_{t\to b-0}\frac{h(t)}{h_0(t)} = \lim_{t\to b-0}\frac{h'(t)}{h_0'(t)} = \frac{h'(b)}{h_0'(b)}.$$

Установлено, что $h/h_0 \in C[a,b]$. Значит, под интегралом в правой части (18) стоит непрерывная функция.

Проверим справедливость равенства (18). При малых $\varepsilon > 0$ имеем

$$\int\limits_{a+\varepsilon}^{b-\varepsilon} p\Big(h' - \frac{h}{h_0}h_0'\Big)^2 dt = \int\limits_{a+\varepsilon}^{b-\varepsilon} p(h')^2 dt - 2\int\limits_{a+\varepsilon}^{b-\varepsilon} \frac{ph_0'}{h_0} hh' dt + \int\limits_{a+\varepsilon}^{b-\varepsilon} p\Big(\frac{h_0'}{h_0}\Big)^2 h^2 dt. \tag{19}$$

Но

$$-2\int\limits_{a+\varepsilon}^{b-\varepsilon} \frac{ph_0'}{h_0} hh' dt = -\int\limits_{a+\varepsilon}^{b-\varepsilon} \frac{ph_0'}{h_0} dh^2 = -\frac{ph_0'}{h_0}h^2\Big|_{a+\varepsilon}^{b-\varepsilon} + \int\limits_{a+\varepsilon}^{b-\varepsilon} \Big(\frac{ph_0'}{h_0}\Big)' h^2 dt =$$
$$= -p\frac{h}{h_0}h_0'h\Big|_{a+\varepsilon}^{b-\varepsilon} + \int\limits_{a+\varepsilon}^{b-\varepsilon} \frac{(ph_0')'}{h_0} h^2 dt - \int\limits_{a+\varepsilon}^{b-\varepsilon} \Big(\frac{h_0'}{h_0}\Big)^2 h^2 dt.$$

Поскольку $h_0$ удовлетворяет уравнению (15), то

$$\int\limits_{a+\varepsilon}^{b-\varepsilon} \frac{(ph_0')'}{h_0} h^2 dt = \int\limits_{a+\varepsilon}^{b-\varepsilon} qh^2 dt.$$

Значит,

$$-2\int\limits_{a+\varepsilon}^{b-\varepsilon} \frac{ph_0'}{h_0} hh' dt = \int\limits_{a+\varepsilon}^{b-\varepsilon} qh^2 dt - \int\limits_{a+\varepsilon}^{b-\varepsilon} p\Big(\frac{h_0'}{h_0}\Big)^2 h^2 dt - p\frac{h}{h_0}h_0'h\Big|_{a+\varepsilon}^{b-\varepsilon}.$$

Подставляя это в (19), получаем

$$\int\limits_{a+\varepsilon}^{b-\varepsilon} p\Big(h' - \frac{h}{h_0}h_0'\Big)^2 dt = \int\limits_{a+\varepsilon}^{b-\varepsilon} \big\{p(h')^2 + qh^2\big\} dt - p\frac{h}{h_0}h_0'h\Big|_{a+\varepsilon}^{b-\varepsilon}.$$

В данном равенстве перейдём к пределу при $\varepsilon \to +0$. Функция $p(h/h_0)h_0'$ непрерывна на $[a,b]$ и $h \in C_0^1[a,b]$, так что двойная подстановка стремится к нулю при $\varepsilon \to +0$. Теперь ясно, что предельный переход приводит к формуле (18), из которой, в частности, следует, что $D(h) \geqslant 0$ при всех $h \in C_0^1[a,b]$. Достаточность установлена. $\square$

**2.3.** Для доказательства необходимости потребуется некоторая подготовка.

**ЛЕММА О СКРУГЛЕНИИ УГЛОВ.** *Пусть* $D(h) \geqslant 0$ *на* $C_0^1[a,b]$. *Если функция* $\hat{h}$ *удовлетворяет условиям*

$$\hat{h} \in C[a,b], \quad \hat{h}(a) = \hat{h}(b) = 0;$$
$$\hat{h} \in C^1[a,\xi], \quad \hat{h} \in C^1[\xi,b] \quad \textit{при некотором} \quad \xi \in (a,b),$$

*то* $D(\hat{h}) \geqslant 0$.

Характерный вид функции $\hat{h}$ изображён на рис. 1.

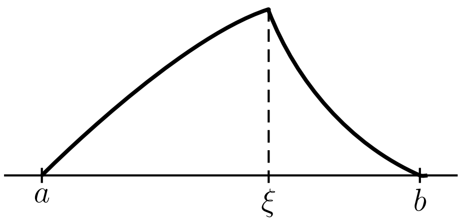


Рис. 1. Вид вариации $\hat{h}$

Доказательство. Введём вспомогательную функцию (см. рис. 2)

$$g(t) = \begin{cases} \left(\frac{1-|t|}{2}\right)^2 & \text{при } \ t \in [-1,1], \\ 0 & \text{при остальных } \ t \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

На интервале $(0,1)$ имеем

$$g'(t) = \frac{d}{dt}\Big(\frac{1-t}{2}\Big)^2 = -\frac{1}{2}(1-t).$$

Учитывая чётность $g$, запишем

$$g'(+0) = -\frac{1}{2}, \quad g'(-0) = \frac{1}{2}, \quad \big|g'(t)\big| \leqslant \frac{1}{2} \quad \text{при} \quad t \neq 0. \tag{20}$$

К этому нужно добавить, что $0 \leqslant g(t) \leqslant 1/4$ на $\mathbb{R}$.

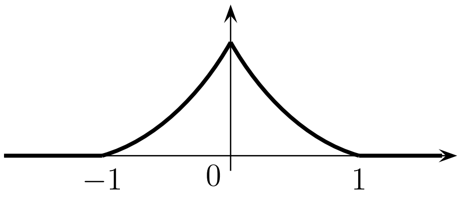


Рис. 2. Вид функции $g(t)$

Положим при $\delta > 0$

$$g_\delta(t) = \delta g\Big(\frac{t}{\delta}\Big).$$

Очевидно, что $g_\delta(t) = 0$ вне $[-\delta, \delta]$. Кроме того,

$$0 \leqslant g_\delta(t) \leqslant \delta/4 \quad \text{на} \quad \mathbb{R}. \tag{21}$$

Поскольку $g'_\delta(t) = g'(t/\delta)$, то согласно (20) при всех $\delta > 0$

$$g'_\delta(+0) = -\frac{1}{2}, \quad g'_\delta(-0) = \frac{1}{2}, \quad \big|g'_\delta(t)\big| \leqslant \frac{1}{2} \quad \text{при} \quad t \neq 0. \tag{22}$$

Введём обозначение $\alpha_1 = \hat{h}'(\xi+0)-\hat{h}'(\xi-0)$ и при малых $\delta > 0$ рассмотрим функцию

$$h_\delta(t) = \hat{h}(t) + \alpha_1 g_\delta(t-\xi).$$

Покажем, что $h_\delta \in C_0^1[a,b]$. Сомнение вызывает только дифферецируемость $h_\delta(t)$ при $t = \xi$. Имеем согласно (22)

$$h'_\delta(\xi+0) = \hat{h}'(\xi+0) - \frac{1}{2}\alpha_1, \quad h'_\delta(\xi-0) = \hat{h}'(\xi-0) + \frac{1}{2}\alpha_1.$$

Учитывая определение $\alpha_1$, получаем $h'_\delta(\xi+0)-h'_\delta(\xi-0) = 0$, то есть $h'_\delta(\xi+0) = h'_\delta(\xi-0)$. Установлено, что $h_\delta \in C_0^1[a,b]$ при малых $\delta > 0$.

Согласно условию леммы $D(h_\delta) \geqslant 0$. Распишем это неравенство подробно:

$$\begin{gathered}
0 \leqslant D\big(\hat{h} + \alpha_1 g_\delta(\cdot-\xi)\big) = \\
= \int_a^b \Big\{p\big(\hat{h}' + \alpha_1 g'_\delta(\cdot-\xi)\big)^2 + q\big(\hat{h} + \alpha_1 g_\delta(\cdot-\xi)\big)^2\Big\}dt = \\
= D(\hat{h}) + \alpha_1 \int_a^b q\big[2\hat{h}g_\delta(\cdot-\xi) + \alpha_1 g_\delta^2(\cdot-\xi)\big]dt + \\
+\alpha_1 \int\limits_{\xi-\delta}^{\xi+\delta} p\Big[2\hat{h}'g'_\delta(\cdot-\xi) + \alpha_1\big(g'_\delta(\cdot-\xi)\big)^2\Big]dt =: \\
=: D(\hat{h}) + \alpha_1 I_\delta^{(0)} + \alpha_1 I_\delta^{(1)}.
\end{gathered} \tag{23}$$

Оценим интегралы $I_\delta^{(0)}$ и $I_\delta^{(1)}$. На основании (21) и (22) имеем

$$\begin{gathered}
|I_\delta^{(0)}| \leqslant \frac{\delta}{2}\int_a^b |q|\big(|\hat{h}| + |\alpha_1|\delta/8\big)dt, \\
|I_\delta^{(1)}| \leqslant \Big(\int\limits_{\xi-\delta}^{\xi} + \int\limits_{\xi}^{\xi+\delta}\Big)p\big(|\hat{h}'| + |\alpha_1|/4\big)dt.
\end{gathered}$$

Очевидно, что $I_\delta^{(0)} \to 0$ и $I_\delta^{(1)} \to 0$ при $\delta \to +0$. Переходя в (23) к пределу при $\delta \to +0$, получаем $D(\hat{h}) \geqslant 0$. Лемма доказана. □

**2.4.** Нам понадобится ещё одно вспомогательное утверждение.

**ЛЕММА 3.** *Пусть в некоторой точке* $\xi \in (a, b]$ *главное решение уравнения Якоби обращается в ноль,* $h_0(\xi) = 0$. *Тогда*

$$\int_a^\xi \bigl[p(h_0')^2 + qh_0^2\bigr]dt = 0. \tag{24}$$

Доказательство. Согласно (15) и определению $h_0$ имеем

$$\int_a^\xi p(h_0')^2 dt = \int_a^\xi ph_0'\,dh_0 = -\int_a^\xi (ph_0')' h_0\,dt = -\int_a^\xi qh_0^2\,dt,$$

откуда и следует (24). □

**2.5.** Переходим к доказательству необходимости в теореме Якоби. Пусть $D(h) \geqslant 0$ на $C_0^1[a,b]$. Покажем, что главное решение $h_0(t)$ уравнения Якоби положительно на $(a, b)$.

В противном случае найдётся точка $\xi \in (a, b)$, в которой $h_0(\xi) = 0$. При этом $h_0'(\xi) \neq 0$ (в силу единственности решения уравнения Якоби — см. пункт 2.2).

Введём функцию

$$\hat{h}_0(t) = \begin{cases} h_0(t) & \text{при } \ t \in [a, \xi], \\ 0 & \text{при } \ t \in [\xi, b]. \end{cases}$$

По лемме 3

$$D(\hat{h}_0) = \int_a^\xi \bigl\{p(h_0')^2 + qh_0^2\bigr\}dt = 0. \tag{25}$$

Возьмём произвольную вариацию $h \in C_0^1[a,b]$ и запишем разложение

$$D(\hat{h}_0 + \alpha h) = D(\hat{h}_0) + \alpha D(h) + 2\alpha \int_a^\xi [ph_0'h' + qh_0h]dt.$$

Имеем

$$\int_a^\xi ph_0'h'\,dt = \int_a^\xi (ph_0')dh = ph_0'h\Big|_a^\xi - \int_a^\xi qh_0h\,dt.$$

Учитывая (25), получаем

$$D(\hat{h}_0 + \alpha h) = \alpha^2 D(h) + 2\alpha\, p(\xi)h_0'(\xi)h(\xi).$$

Выберем допустимую вариацию $h$ так, чтобы выполнялось неравенство

$$\lambda := 2p(\xi)h_0'(\xi)h(\xi) < 0.$$

Тогда
$$D(\hat{h}_0 + \alpha h) = \alpha\big[\lambda + \alpha D(h)\big]. \tag{26}$$
При малых $\alpha > 0$ правая часть (26) отрицательна. Вместе с тем, $D(\hat{h}_0 + \alpha h) \geqslant 0$, поскольку функция $\hat{h}_0 + \alpha h$ удовлетворяет условиям леммы о скруглении углов. Полученное противоречие завершает доказательство теоремы Якоби. □

**2.6.** Условие $h_0(t) > 0$ при $t \in (a, b)$ называется *условием Якоби.* При доказательстве достаточности в теореме Якоби было установлено, что выполнение условия Якоби гарантирует для интергального квадратичного функционала $D(h)$ представление (18). Этот факт имеет дополнительное следствие.

**ЛЕММА 4.** *Пусть выполнено условие Якоби. Если допустимая вариация $h_*$ такова, что $D(h_*) = 0$, то $h_*(t) = \lambda h_0(t)$ при некотором вещественном $\lambda$, где $h_0$ — главное решение уравнения Якоби.*

Доказательство. Согласно (18)
$$D(h_*) = \int_a^b p\Big(h'_* - \frac{h_*}{h_0}h'_0\Big)^2 dt.$$
По условию леммы $D(h_*) = 0$. Принимая во внимание, что $p(t) > 0$ на $[a, b]$, получаем
$$h'_* - \frac{h_*}{h_0}h'_0 = 0 \quad \text{на} \quad (a, b).$$
Перепишем это равенство в эквивалентном виде
$$\frac{h'_* h_0 - h_* h'_0}{h_0^2} = 0 \quad \text{на} \quad (a, b).$$
Это значит, что $\left(\frac{h_*}{h_0}\right)' = 0$ на $(a, b)$. Теперь очевидно, что $\frac{h_*}{h_0} \equiv \mathrm{const}$ или $h_*(t) = \lambda h_0(t)$ при $t \in (a, b)$. По непрерывности последнее равенство выполняется на всём отрезке $[a, b]$.

Лемма доказана. □

## 3°. Критерий положительной определённости интегральной квадратичной формы

**3.1.** Квадратичная форма $D(h)$ называется *положительно определённой* на $C_0^1[a, b]$, если $D(h) > 0$ при всех $h \in C_0^1[a, b]$, не равных тождественно нулю на $[a, b]$.

**ТЕОРЕМА 4.** *Пусть выполнены условия* (14). *Для того чтобы квадратичная форма $D(h)$ была положительно определённой на $C_0^1[a, b]$, необходимо и достаточно, чтобы главное решение $h_0(t)$ уравнения Якоби было положительным на $(a, b]$ (включая точку $t = b$).*

Доказательство. Необходимость. Очевидно, что положительно определённая форма $D(h)$ является и неотрицательно определённой. По теореме Якоби $h_0(t) > 0$ на $(a,b)$. Остаётся проверить, что $h_0(b) > 0$. Допустим противное: $h_0(b) = 0$. Тогда $h_0 \in C_0^1[a,b]$. Более того, $D(h_0) = 0$. Это следует из леммы 3 при $\xi = b$. Получили противоречие с положительной определённостью $D(h)$, поскольку главное решение $h_0(t)$ уравнения Якоби не равно тождественно нулю на $[a,b]$ $(h_0'(a) = 1)$.

Достаточность. Так как, в частности, $h_0(t) > 0$ на $(a,b)$, то по теореме Якоби $D(h) \geqslant 0$ на $C_0^1[a,b]$. Допустим, что $D(h_*) = 0$ на некоторой допустимой вариации $h_*$. В силу леммы 4 имеем $h_*(t) = \lambda h_0(t)$ на $[a,b]$. В частности, $h_*(b) = \lambda h_0(b)$. В этом равенстве $h_*(b) = 0$ по определению допустимой вариации и $h_0(b) > 0$ по условию теоремы. Значит, $\lambda = 0$, так что $h_*(t) \equiv 0$ на $[a,b]$. Установлено, что $D(h) > 0$ на всех допустимых вариациях, не равных тождественно нулю на $[a,b]$.

Теорема доказана. □

**3.2.** Условие $h_0(t) > 0$ при $t \in (a,b]$ называется *усиленным условием Якоби.*

**ТЕОРЕМА 5.** *При выполнении усиленного условия Якоби существует константа $\mu > 0$, такая, что*

$$D(h) \geqslant \mu \int_a^b (h')^2 dt \qquad \forall h \in C_0^1[a,b]. \tag{27}$$

Доказательство. Теория Якоби развивается в предположениях (14). В частности, считается, что выполнено усиленное условие Лежандра $p(t) > 0$ при $t \in [a,b]$.

Обозначим

$$\mu_0 = \min_{t\in[a,b]} p(t).$$

Ясно, что $\mu_0 > 0$. При $\mu \in (0,\mu_0)$ рассмотрим семейство интегральных квадратичных функционалов

$$D_\mu(h) = \int_a^b \big[(p-\mu)(h')^2 + qh^2\big]dt.$$

Покажем, что при некотором $\mu \in (0,\mu_0)$ функционал $D_\mu(h)$ положительно определён на $C_0^1[a,b]$. Отсюда очевидным образом будет следовать неравенство (27).

Запишем уравнение Якоби для $D_\mu(h)$:

$$h'' + \frac{p'}{p-\mu}h' - \frac{q}{p-\mu}h = 0. \tag{28}$$

Обозначим через $h(t,\mu)$ главное решение уравнения Якоби. Оно удовлетворяет начальным условиям

$$h(a,\mu)=0, \quad h'(a,\mu)=1.$$

Коэффициенты уравнения (28) зависят от параметра $\mu$. Они непрерывны на множестве $[a,b]\times(-\mu_0,\mu_0)$, причём $h(t,0)=h_0(t)$. По теореме о непрерывной зависимости решения линейного однородного дифференциального уравнения от параметра найдётся $\mu_1\in(0,\mu_0)$, такое, что функции $h(t,\mu)$ и $h'(t,\mu)$ будут непрерывными по совокупности переменных на множестве $[a,b]\times[-\mu_1,\mu_1]$.

Возьмём $\varepsilon=\frac{1}{2}$. По нему найдётся $\delta>0$ со свойством

$$\left|h'(t,\mu)-h'(a,0)\right|\leqslant\frac{1}{2} \quad \text{при} \quad 0\leqslant t-a\leqslant\delta \quad \text{и} \quad 0\leqslant\mu\leqslant\delta.$$

В частности, при тех же $t$ и $\mu$

$$h'(t,\mu)\geqslant h'(a,0)-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

и

$$h(t,\mu)=h(t,\mu)-h(a,\mu)=h'(\xi,\mu)(t-a)\geqslant\frac{1}{2}(t-a). \tag{29}$$

Пусть при $t\in[a+\delta,b]$ будет $h(t,0)\geqslant\varepsilon_1>0$. Тогда найдётся $\delta_1\in(0,\delta]$ со свойством

$$\left|h(t,\mu)-h(t,0)\right|\leqslant\frac{1}{2}\varepsilon_1 \quad \text{при} \quad t\in[a+\delta,b] \quad \text{и} \quad 0\leqslant\mu\leqslant\delta_1.$$

В частности, при тех же $t$ и $\mu$

$$h(t,\mu)\geqslant h(t,0)-\frac{1}{2}\varepsilon_1\geqslant\frac{1}{2}\varepsilon_1. \tag{30}$$

На основании (29) и (30) заключаем, что при $\mu=\delta_1$ главное решение $h(t,\mu)$ уравнения (28) положительно на $(a,b]$. Это гарантирует положительную определённость функционала $D_\mu(h)$ на $C_0^1[a,b]$.

Теорема доказана. □

**4°. Описание всего множества решений.** Вернёмся к квадратичной вариационной задаче (1). Пусть $x_*$ — некоторое её решение. Согласно (2) и (5) имеем

$$Q(x_*+h)=Q(x_*)+D(h) \quad \forall h\in C_0^1[a,b].$$

Отсюда следует, что в случае положительной определённости интегральной квадратичной формы $D(h)$ решение $x_*$ единственно. Если к тому же выполнены условия (14), то в силу теоремы 5 при некотором $\mu>0$ справедливо неравенство

$$Q(x_*+h)\geqslant Q(x_*)+\mu\int_0^1(h')^2dt \qquad \forall h\in C_0^1[a,b].$$

А что можно сказать, когда $h_0(t) > 0$ при $t \in (a, b)$, но $h_0(b) = 0$, то есть когда форма $D(h)$ только неотрицательно определена?

**ТЕОРЕМА 6.** *Пусть $x_*$ — некоторое решение задачи* (1). *Если выполнено сформулированное выше условие, то всё множество решений задачи* (1) *допускает представление*

$$x(t) = x_*(t) + \lambda h_0(t) \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}. \tag{31}$$

Доказательство. В данном случае $h_0 \in C_0^1[a, b]$ и $D(h_0) = 0$ в силу леммы 3 при $\xi = b$.

Возьмём план $x$ вида (31). Пользуясь разложением (2) и формулой (5), получаем

$$Q(x) = Q(x_* + \lambda h_0) = Q(x_*) + \lambda^2 D(h_0) = Q(x_*),$$

так что на плане $x$, как и на плане $x_*$, функционал $Q(x)$ достигает наименьшего значения.

Наоборот, пусть $x$ — оптимальный план. Обозначим $h_* = x - x_*$. Ясно, что $h_* \in C_0^1[a, b]$. Имеем

$$Q(x) = Q(x_* + h_*) = Q(x_*) + D(h_*).$$

Так как $Q(x) = Q(x_*)$, то $D(h_*) = 0$. По лемме 4, $h_* = \lambda h_0$ при некотором вещественном $\lambda$. Значит, $x = x_* + h_* = x_* + \lambda h_0$.

Теорема доказана. □

### 5°. Схема решения квадратичной вариационной задачи

**5.1.** Рассмотрим квадратичную вариационную задачу

$$\begin{gathered} Q(x) := \int_a^b \left\{ p(x')^2 + qx^2 - 2fx \right\} dt \to \inf, \\ x(a) = A, \quad x(b) = B, \quad x \in C^1[a, b]. \end{gathered} \tag{32}$$

Предположим, что

$$q \in C[a, b], \quad p \in C^1[a, b], \quad p(t) > 0 \quad \text{на} \quad [a, b].$$

Проведённый в предыдущих разделах анализ позволяет предложить следующую схему решения задачи (32).

1) Находим главное решение уравнения Якоби

$$\begin{gathered} -(ph')' + qh = 0, \\ h(a) = 0, \quad h'(a) = 1. \end{gathered}$$

Обозначим его $h_0(t)$.

2) Если $h_0(\xi) = 0$ при некотором $\xi \in (a, b)$, то

$$\inf_{x \in \Omega} Q(x) = -\infty.$$

(Это следует из леммы 1, поскольку в данном случае в силу теоремы Якоби квадратичная форма $D(h)$ не является неотрицательно определённой.)

3) Пусть $h_0(t) > 0$ при $t \in (a, b)$. Решаем краевую задачу Штурма–Лиувилля

$$\begin{gathered} -(px')' + qx = f, \\ x(a) = A, \quad x(b) = B. \end{gathered}$$

Пусть $x_*$ — некоторое её решение. (Отметим, что существование решения не гарантируется, равно как не исключается наличие бесконечного множества решений — см. примеры ниже.)

4) Если $h_0(b) > 0$, то $x_*$ — единственное решение задачи (32).

Если $h_0(b) = 0$, то всё множество решений задачи (32) допускает представление

$$x(t) = x_*(t) + \lambda h_0(t), \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

З а м е ч а н и е 1 . Дифференциальные операторы в уравнениях Якоби и Штурма-Лиувилля одинаковые. Только уравнение Якоби однородное, а уравнение Штурма–Лиувилля неоднородное, и для уравнения Якоби решается задача Коши, а для уравнения Штурма–Лиувилля — краевая задача.

З а м е ч а н и е 2 . Выполнение усиленного условия Лежандра $p(t) > 0$ при $t \in$ $\in [a, b]$ существенно для теории Якоби. Если $p(t) \geqslant 0$ и $q(t) \geqslant 0$ при $t \in [a, b]$, то квадратичная форма $D(h)$ неотрицательно определена на $C_0^1[a, b]$. В этом случае следует сразу переходить к решению краевой задачи для уравнения Штурма-Лиувилля.

**5.2.** Обратимся к примерам.

**ПРИМЕР 1.** Рассмотрим квадратичную вариационную задачу

$$\begin{gathered} Q(x) := \int_0^{\pi/2} \big\{(x')^2 - x^2\big\} dt \to \inf, \\ x(0) = 0, \quad x(\pi/2) = 1, \quad x \in C^1[0, \pi/2]. \end{gathered} \tag{33}$$

В данном случае $p(t) \equiv 1$, $q(t) \equiv -1$, $f(t) \equiv 0$. Все необходимые условия выполнены. Найдём главное решение уравнения Якоби

$$-h'' - h = 0, \quad h(0) = 0, \quad h'(0) = 1.$$

Общее решение уравнения Якоби имеет вид

$$h(t) = c_1 \cos(t) + c_2 \sin(t).$$

Выделим главное решение: $h(0) = 0 \Rightarrow c_1 = 0$; $h'(0) = 1 \Rightarrow c_2 = 1$. Таким образом, $h_0(t) = \sin(t)$. Имеем $h_0(t) > 0$ на $(0, \pi/2]$.

Решим краевую задачу Штурма–Лиувилля

$$-x'' - x = 0, \quad x(0) = 0, \quad x(\pi/2) = 1.$$

Из общего решения $x(t) = c_1 \cos(t) + c_2 \sin(t)$ выделим то, которое удовлетворяет краевым условиям: $x(0) = 0 \Rightarrow c_1 = 0$; $x(\pi/2) = 1 \Rightarrow c_2 = 1$. Получаем $x_*(t) = \sin(t)$. Поскольку $h_0(\pi/2) > 0$, то $x_*$ — единственное решение задачи (33).

**ПРИМЕР 2.** В задаче (33) заменим $\pi/2$ на $\pi$. Придём к такой задаче:

$$\begin{gathered} Q(x) := \int_0^\pi \big\{(x')^2 - x^2\big\} dt \to \inf, \\ x(0) = 0, \quad x(\pi) = 1, \quad x \in C^1[0, \pi]. \end{gathered} \tag{34}$$

Главное решение уравнения Якоби не изменится, $h_0(t) = \sin(t)$, причём $h_0(t)$ остаётся положительным на $(0, \pi)$.

Обратимся к краевой задаче Штурма–Лиувилля:

$$-x'' - x = 0, \quad x(0) = 0, \quad x(\pi) = 1. \tag{35}$$

Из общего решения $x(t) = c_1 \cos(t) + c_2 \sin(t)$ выделим то, которое удовлетворяет первому краевому условию: $x(0) = 0 \Rightarrow c_1 = 0$. Второе краевое условие $x(\pi) = 1$ принимает вид $c_2 \sin(\pi) = 1$. Оно не выполняется ни при каком $c_2$. Значит, задача (35) не имеет решения.

Покажем, что в данном случае $\inf\limits_{x \in \Omega} Q(x) = -\infty$. Возьмём последовательность планов

$$x_n(t) = \frac{1}{\pi}\big(t + n \sin(t)\big), \quad n = 1, 2, \ldots$$

Имеем

$$\begin{aligned} Q(x_n) &= \frac{1}{\pi^2} \int_0^\pi \Big\{\big(1 + n\cos(t)\big)^2 - \big(t + n\sin(t)\big)^2\Big\} dt = \\ &= \frac{1}{\pi^2} \int_0^\pi (1 - t^2) dt + \frac{2n}{\pi^2} \int_0^\pi \big[\cos(t) - t\sin(t)\big] dt. \end{aligned}$$

Поскольку
$$-\int_0^\pi t\sin(t)dt = t\cos(t)\Big|_0^\pi - \int_0^\pi \cos(t)dt,$$
то
$$Q(x_n) = \frac{1}{\pi^2}\int_0^\pi (1-t^2)dt - \frac{2n}{\pi}.$$
Очевидно, что $Q(x_n) \to -\infty$ при $n \to \infty$.

**ПРИМЕР 3.** В задаче (34) заменим второе краевое условие $x(\pi) = 1$ на $x(\pi) = 0$. У новой задачи

$$\begin{gathered} Q(x) := \int\limits_0^\pi \big\{(x')^2 - x^2\big\}dt \to \inf, \\ x(0) = 0, \quad x(\pi) = 0, \quad x \in C^1[0,\pi] \end{gathered} \tag{36}$$

главное решение уравнения Якоби остаётся тем же, $h_0(t) = \sin(t)$. Сохраняется и его положительность на $(0,\pi)$. Что касается краевой задачи Штурма–Лиувилля
$$-x'' - x = 0, \quad x(0) = 0, \quad x(\pi) = 0,$$
то её очевидным решением является функция $x_*(t) \equiv 0$. Учитывая равенство $h_0(\pi) = 0$, приходим к выводу о том, что всё множество решений задачи (36) допускает представление

$$x(t) = x_*(t) + \lambda h_0(t) = \lambda\sin(t), \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

**5.3.** В заключение отметим, что использованный в данной статье элементарный подход позволяет решать и более сложные вариационные задачи (см., например, [1]). Дальнейшие сведения о вариационном исчислении можно найти в книгах [2, 3, 4, 5].

## ДОБАВЛЕНИЕ

## ВЫПУКЛОСТЬ КВАДРАТИЧНОГО ФУНКЦИОНАЛА

На выпуклом множестве $\Omega$,
$$\Omega = \big\{x \in C^1[a,b] \mid x(a) = A,\, x(b) = B\big\},$$
рассмотрим квадратичный функционал
$$Q(x) = \int_a^b \big[p(x')^2 + qx^2 - 2fx\big]dt,$$
где $p$, $q$ и $f$ — непрерывные функции.

**ТЕОРЕМА.** *Для того чтобы функционал $Q(x)$ был выпуклым на $\Omega$, необходимо и достаточно, чтобы интегральная квадратичная форма*

$$D(h) = \int_a^b \big[p(h')^2 + qh^2\big]\,dt$$

*была неотрицательно определённой на $C_0^1[a,b]$.*

Доказательство. Достаточность. Нужно проверить, что при всех $x_0$, $x_1$ из $\Omega$ и всех $\lambda \in [0,1]$ выполняется неравенство

$$Q\big(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_0\big) \leqslant \lambda Q(x_1) + (1-\lambda)Q(x_0). \tag{37}$$

Зафиксируем $x_0$, $x_1$ из $\Omega$ и положим $h = x_1 - x_0$. Ясно, что $h \in C_0^1[a,b]$. При всех $\lambda \in \mathbb{R}$ согласно (2) имеем

$$Q(x_0 + \lambda h) = Q(x_0) + 2\lambda l(x_0; h) + \lambda^2 D(h). \tag{38}$$

В частности, при $\lambda = 1$

$$Q(x_1) = Q(x_0) + 2l(x_0; h) + D(h).$$

Отсюда следует, что

$$2l(x_0; h) = Q(x_1) - Q(x_0) - D(h).$$

Подставив это в (38), получим

$$\begin{aligned} Q\big(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_0\big) &= Q(x_0) + \lambda\big[Q(x_1) - Q(x_0) - D(h)\big] + \lambda^2 D(h) = \\ &= \lambda Q(x_1) + (1-\lambda)Q(x_0) - \lambda(1-\lambda)D(h). \end{aligned} \tag{39}$$

По условию теоремы $D(h) \geqslant 0$, что гарантирует справедливость неравенства (37) при $\lambda \in [0,1]$.

Необходимость. Зафиксируем $h \in C_0^1[a,b]$, возьмём произвольную функцию $x_0$ из $\Omega$ и положим $x_1 = x_0 + h$. Ясно, что $x_1 \in \Omega$. Воспользуемся равенством (39) при $\lambda = \frac{1}{2}$. Запишем

$$Q\big(\tfrac{1}{2}(x_1 + x_0)\big) - \tfrac{1}{2}\big[Q(x_1) + Q(x_0)\big] = -\tfrac{1}{4}D(h).$$

Левая часть этого равенства неположительна в силу выпуклости $Q(x)$ на $\Omega$. Значит, $D(h) \geqslant 0$.

Теорема доказана. □

Замечание. Конкретный вид функционалов $l(x;h)$ и $D(h)$ не играл роли. Использовалось только разложение (38).

## Литература


1. Кирушев В. А., Малозёмов В. Н., Певный А. Б. *Хвост дракона* // Журн. вычисл. мат. и матем. физ., 1997. Т. 37. № 11. С. 1362–1369.

2. Буслаев В. С. *Вариационное исчисление.* Л.: Изд-во ЛГУ, 1980. 287 с.

3. Алексеев В. М., Тихомиров В. М., Фомин С. В. *Оптимальное управление.* М.: Наука, 1979. 429 с.

4. Смирнов В. И. *Курс высшей математики.* Т. IV. Часть I. Изд. 6-е. М.: Наука, 1974. 336 с.

5. Михлин С. Г. *Курс математической физики.* М.: Физматгиз, 1968. 575 с.