ЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ

Часть 1. Линейные экстремальные задачи

1.1. Докажите, что

$$\sup_{x\in P} f(x) = -\inf_{x\in P}\bigl(-f(x)\bigr).$$

1.2. Пусть $P = \bigcup\limits_{k=1}^{n} P_k$. Докажите, что

$$\inf_{x\in P} f(x) = \min_{k\in 1:n}\Bigl\{\inf_{x\in P_k} f(x)\Bigr\}.$$

1.3. Докажите, что

$$\inf_{\{x_1\in P_1,\dots,x_n\in P_n\}} f(x_1,\dots,x_n) = \inf_{x_1\in P_1}\cdots\inf_{x_n\in P_n} f(x_1,\dots,x_n).$$

1.4. Докажите, что экстремальная задача

$$\varphi(x) := \sum_{k=1}^{m}\bigl|f_k(x)\bigr| \to \inf_{x\in P}$$

эквивалентна следующей экстремальной задаче

$$\begin{aligned}
\psi(x,t) := \sum_{k=1}^{m} t_k &\to \inf,\\
f_k(x) + t_k &\geqslant 0,\ k\in 1:m;\\
-f_k(x) + t_k &\geqslant 0,\ k\in 1:m;\\
x &\in P.
\end{aligned}$$

1.5. Дана экстремальная задача

$$\varphi(x) := \sum_{k=1}^{m}\bigl[f_k(x)\bigr]_+ \to \inf_{x\in P},$$

где $[u]_+ = \max\{0,u\}$. Постройте эквивалентную экстремальную задачу с линейной целевой функцией.

1.6. Рассмотрим две экстремальные задачи

$$\begin{array}{ll} -|x| \to \inf, & -(u+v) \to \inf, \\ -1 \leqslant x \leqslant 1; & x = u - v,\ u \geqslant 0,\ v \geqslant 0, \\ & -1 \leqslant x \leqslant 1. \end{array}$$

Докажите, что эти задачи неэквивалентны.

1.7 (Задача Ферма). У квадратного листа вырезать квадратные уголки так, чтобы из оставшейся фигуры можно было получить коробку наибольшего объёма.

1.8 (Задача Кеплера). В шар вписать цилиндр наибольшего объёма.

1.9 (Задача о шатре). Найти прямой круговой конус наибольшего объёма при заданной площади боковой поверхности.

1.10. Решите задачу ЛП

$$\begin{gathered} v \to \inf, \\ u[k] - v = a[k],\ k \in 1:n; \\ u[k] \geqslant 0,\ k \in 1:n; \quad v \geqslant 0, \end{gathered}$$

где $a[k]$ — заданные вещественные числа.

1.11. Найдите всё множество оптимальных планов в задаче ЛП

$$\begin{gathered} \sum_{j=1}^{n} c_j\, x_j \to \inf, \\ \sum_{j=1}^{n} x_j = 1, \\ x_j \geqslant 0,\ j \in 1:n. \end{gathered}$$

1.12. Найдите всё множество оптимальных планов в задаче ЛП

$$\begin{gathered} \sum_{j=1}^{n} c_j\, x_j \to \inf, \\ |x_j - a_j| \leqslant b_j,\ j \in 1:n, \end{gathered}$$

где b_j — положительные числа.

1.13. Решите задачу ЛП методом перебора базисных планов:

$$\begin{aligned} -x_1 + 2x_2 - x_3 &\to \inf, \\ x_1 + 4x_2 + x_3 &= 5, \\ x_1 - 2x_2 - x_3 &= -1, \\ x_j \geqslant 0,\ j &\in 1:3. \end{aligned}$$

1.14. Решите задачу ЛП

$$\begin{aligned} -x_1 + 4x_2 - 5x_3 &\to \inf, \\ -x_1 + x_2 + x_3 &\geqslant -2, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 &= 4, \\ x_1 \geqslant 0,\ x_2 &\geqslant 0. \end{aligned}$$

1.15*. Дана параметрическая задача ЛП

$$\begin{aligned} ax_1 + x_2 \quad + \quad x_3 &\to \inf, \\ x_1 - x_2 + (a-1)x_3 &= a - 2, \\ x_1 + x_2 + (a+1)x_3 &= a + 2, \\ x_j \geqslant 0,\ j &\in 1:3. \end{aligned}$$

Постройте график экстремальных значений целевой функции в зависимости от параметра a.

1.16*. Пусть $A = A[M, N]$ — произвольная матрица и $b = b[M]$ — произвольный вектор. Рассмотрим выпуклое многогранное множество Ω, определяемое соотношениями

$$Ax = b,\ x \geqslant \mathbb{O}.$$

Докажите, что понятие базисного плана эквивалентно понятию угловой точки множества Ω.

(Напомним, что точка $x_0 \in \Omega$ называется угловой, если из условий $x_0 = \frac{1}{2}(x_1 + x_2)$, $x_1 \in \Omega$, $x_2 \in \Omega$ следует, что $x_1 = x_2$.)

1.17. Найдите всё множество решений следующей задачи ЛП:

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + x_3 &\to \inf, \\ 2x_1 - 5x_2 + 2x_3 &= 2, \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 &\geqslant 1, \\ x_2 \geqslant 0,\ x_3 &\geqslant 0. \end{aligned}$$

1.18. Постройте пару двойственных задач ЛП, множества планов которых пусты.

1.19. Дана задача ЛП

$$
\begin{aligned}
&-x_1 - 2x_2 + x_3 \to \sup,\\
&x_1 + x_2 - x_3 = 2,\\
&x_1 - x_2 + x_3 \leqslant 1,\\
&x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0 \qquad\qquad\qquad .
\end{aligned}
$$

Проверьте план $\hat{x} = (0, 0, -2)$ на оптимальность, используя условия дополнительности.

1.20. Даны две задачи ЛП

$$
\begin{array}{ll}
c[N] \times x[N] \to \inf & b[M] \times u[M] \to \sup\\
A[M_1, N] \times x[N] \geqslant b[M_1] & u[M] \times A[M, N_1] \leqslant c[N_1]\\
A[M_2, N] \times x[N] = b[M_2] & u[M] \times A[M, N_2] = c[N_2]\\
A[M_3, N] \times x[N] \leqslant b[M_3] & u[M] \times A[M, N_3] \geqslant c[N_3]\\
x[N_1] \geqslant \mathbb{O}[N_1],\ x[N_3] \leqslant \mathbb{O}[N_3], & u[M_1] \geqslant \mathbb{O}[M_1],\ u[M_3] \leqslant \mathbb{O}[M_3],
\end{array}
$$

где $M = M_1 \cup M_2 \cup M_3$, $N_2 = N \setminus (N_1 \cup N_3)$. Докажите следующее утверждение: если x_0, u_0 — планы этих задач и $\langle c, x_0\rangle = \langle b, u_0\rangle$, то x_0, u_0 — оптимальные планы.

1.21. Дана пара экстремальных задач

$$
\begin{array}{ll}
\langle c, x\rangle \to \inf & \langle b, u\rangle \to \sup\\
Ax = b, \quad x \in K & c - uA \in K^+,
\end{array}
$$

где $K \subset \mathbb{R}^N$ — некоторый конус и K^+ — сопряжённый конус. Докажите следующее утверждение: если x_0, u_0 — планы этих задач и $\langle c, x_0\rangle = \langle b, u_0\rangle$, то x_0, u_0 — оптимальные планы.

1.22. Пусть $A = A[M, N]$ — произвольная матрица. Докажите, что

$$
\max_{i\in M} \min_{j\in N} A[i, j] \leqslant \min_{j\in N} \max_{i\in M} A[i, j].
$$

Приведите пример матрицы A, для которой это неравенство выполняется как строгое.

1.23*. Рассматривается матричная игра с матрицей платежей

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & c \\ c & 1 & -1 \end{pmatrix},$$

где $c \in \mathbb{R}$ — параметр. Постройте график цены игры как функции параметра c.

1.24*. Пусть $a_0, a_1, \ldots, a_m$ — векторы из $\mathbb{R}^N$ и $a_0 \notin \operatorname{lin}\bigl(\{a_i\}_{i=1}^m\bigr)$. Рассмотрим две экстремальные задачи

$$\max_{j \in N} \Bigl| a_0[j] - \sum_{i=1}^{m} x[i] a_i[j] \Bigr| \to \inf_{x \in \mathbb{R}^m}, \qquad \begin{aligned} &\sum_{j \in N} \bigl|\xi[j]\bigr| \to \inf, \\ &\langle a_0, \xi \rangle = 1, \\ &\langle a_i, \xi \rangle = 0,\ i \in 1:m. \end{aligned}$$

Докажите, что эти задачи имеют решения и что произведение их экстремальных значений равно единице.

1.25. Дана задача ЛП в канонической форме

$$\begin{gathered} 3x_1 + x_2 - x_3 - 2x_4 \to \inf, \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = -1, \\ x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 1, \\ x_j \geqslant 0,\ j \in 1:4. \end{gathered}$$

1) Найдите оптимальный план этой задачи при помощи симплекс-метода с полным набором искусственных переменных.

2*) Найдите всё множество оптимальных планов.

Часть 2. Нелинейные экстремальные задачи

2.1. Пусть $A = A[M, N]$ — произвольная матрица. Найдите градиент функции

$$f(x) = \frac{1}{2}\|Ax - b\|^2.$$

2.2. Пусть $Q(x)$ — квадратичная функция и $B = B[N, M]$ — произвольная матрица. Найдите градиент функции

$$F(y) = Q(x_0 + By).$$

2.3. Пусть $Q(x)$ — квадратичная функция. Докажите, что при всех вещественных t справедливо равенство

$$Q\big(tx_1 + (1-t)x_0\big) = tQ(x_1) + (1-t)Q(x_0) - \frac{1}{2}\,t(1-t)\big\langle D(x_1 - x_0), x_1 - x_0\big\rangle.$$

2.4. Пусть D — симметричная неотрицательно определённая матрица. Докажите, что из условия $\langle Dx_0, x_0\rangle = 0$ следует, что $Dx_0 = \mathbb{O}$.

2.5. Докажите, что квадратичная функция, ограниченная снизу на $\mathbb{R}^N$, является выпуклой на $\mathbb{R}^N$.

2.6. Докажите, что функция $f(x)$, дифференцируемая на выпуклом открытом множестве U, будет выпуклой на U тогда и только тогда, когда

$$\big\langle f'(x_1) - f'(x_0), x_1 - x_0\big\rangle \geqslant 0 \qquad \forall\, x_0, x_1 \in U.$$

2.7. Найдите матрицу ортогонального проектирования на подпространство

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 &= 0,\\ x_1 + x_2 - x_3 - x_4 &= 0. \end{aligned}$$

2.8. Пусть $A = A[M, N]$ — матрица с линейно независимыми строками и P — матрица ортогонального проектирования на подпространство $Ax = \mathbb{O}$. Докажите, что

$$\|Pc\| \leqslant \|c\|.$$

Когда это неравенство выполняется как равенство?

2.9*. Найдите все собственные числа с учётом их кратности матрицы ортогонального проектирования на подпространство.

2.10. Пусть $A = A[M, N]$ — матрица с линейно независимыми строками. Решите экстремальную задачу

$$\frac{1}{2}\|x\|^2 \to \inf,$$
$$Ax = b.$$

2.11. Найдите проекцию точки

$$c = \Big(\frac{1}{3},\ -1,\ 0,\ \frac{1}{3},\ 0,\ -\frac{1}{3}\Big)$$

на стандартный симплекс.

2.12. Решите экстремальную задачу

$$\frac{1}{2}\|x - c\|^2 \to \inf,$$
$$x \geqslant \mathbb{O}.$$

2.13. Решите экстремальную задачу

$$\frac{1}{2}\|x - c\|^2 \to \inf,$$
$$|x_j| \leqslant 1, \quad j \in 1 : n.$$

2.14. Пусть D — симметричная положительно определённая матрица. Докажите, что

$$\min_{x \in \mathbb{R}^N} \Big\{ \tfrac{1}{2}\langle Dx, x\rangle + \langle c, x\rangle \Big\} = -\tfrac{1}{2}\langle D^{-1}c, c\rangle.$$

2.15. Решите экстремальную задачу

$$\langle Dx, x\rangle \to \inf,$$
$$\langle c, x\rangle = 1,$$

где D — симметричная положительно определённая матрица и c — ненулевой вектор.

2.16*. Пусть D — симметричная положительно определённая матрица и c — ненулевой вектор. Найдите решение экстремальной задачи

$$\langle c, x\rangle \to \sup,$$
$$\langle Dx, x\rangle = 1.$$

Докажите его единственность. Выясните, как связаны экстремальные значения целевых функций данной задачи и предыдущей.

2.17. Решите экстремальную задачу

$$f(x,v) := \frac{1}{2}\|x\|^2 + v \to \inf,$$
$$\langle a, x\rangle + v \geqslant 0.$$

2.18. Пусть a_j, $j \in M$, и c — векторы из $\mathbb{R}^N$. Для задачи квадратичного программирования

$$\frac{1}{2}\Big\| \sum_{j\in M} x[j]a_j - c\Big\|^2 \to \inf,$$
$$\sum_{j\in M} x[j] = 1,$$
$$x[M] \geqslant \mathbb{O}[M]$$

запишите двойственную задачу.

2.19. Рассмотрим задачу нелинейного программирования

$$f(x) \to \inf,$$
$$a_i(x) \geqslant 0,\ i \in M,$$
$$x \in U,$$

где $U \subset \mathbb{R}^N$ — открытое выпуклое множество. Пусть функции f, a_i дифференцируемы на U, причём f выпукла, а все a_i — вогнуты. Если плану x_* можно сопоставить вектор u_* со свойствами

$$f'(x_*) = \sum_{i\in M} u_*[i]a_i'(x_*),$$
$$u_*[i]a_i(x_*) = 0,\ u_*[i] \geqslant 0 \quad \forall i \in M,$$

то x_* — решение данной задачи. Проверьте это.

2.20. Пусть $U \subset \mathbb{R}^N$ — открытое выпуклое множество. Докажите, что функция $f \in C^2(U)$ выпукла на U тогда и только тогда, когда

$$\langle f''(x)h, h\rangle \geqslant 0$$

при всех $h \in \mathbb{R}^N$ и $x \in U$.

2.21. Докажите, что среднее гармоническое

$$H(x_1, x_2) = \frac{2}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}}$$

является вогнутой функцией при $x_1 > 0$, $x_2 > 0$.

2.22*. Докажите, что любую функцию $F \in C^2[0,1]$ можно представить в виде

$$F(x) = f(x) - g(x), \quad x \in [0,1],$$

где f и g — выпуклые функции класса $C^2[0,1]$.

2.23. Фунция f, заданная на выпуклом множестве $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, называется квазивыпуклой, если при всех x_0, x_1 из Ω и всех $t \in [0,1]$ выполняется неравенство

$$f\big(tx_1 + (1-t)x_0\big) \leqslant \max\big\{f(x_0), f(x_1)\big\}.$$

Докажите, что функция f квазивыпукла на Ω тогда и только тогда, когда множество

$$G_\lambda = \big\{x \in \Omega | f(x) \leqslant \lambda\big\}$$

выпукло при всех вещественных λ.

2.24*. Докажите, что дробно-линейная функция

$$R(x) = \frac{\langle c, x\rangle + \alpha}{\langle b, x\rangle + \beta}$$

квазивыпукла на множестве

$$\Omega = \big\{x \in \mathbb{R}^N \mid \langle b, x\rangle + \beta > 0\big\}.$$

2.25. Решите экстремальную задачу

$$\begin{gathered} x_1^2 + (x_2 - 1)^2 \to \inf, \\ \tfrac{1}{2}x_1^2 - x_2 \geqslant 0. \end{gathered}$$

Часть 3. Вариационные задачи

3.1. Решите вариационную задачу

$$Q(x) := \int_0^1 \big[(x')^2 + x^2\big]\,dt \to \inf,$$
$$x(0) = 0,\ x(1) = 1,\ x \in C^1[0,1].$$

3.2. Решите вариационную задачу

$$Q(x) := \int_1^2 t^{-3}(x')^2 dt \to \inf,$$
$$x(1) = 1,\ x(2) = 0,\ x \in C^1[1,2].$$

3.3. Докажите, что вариационная задача

$$Q(x) := \int_0^1 x^2 dt \to \inf,$$
$$x(0) = 0,\ x(1) = 1,\ x \in C^1[0,1]$$

не имеет решения. Найдите $\inf Q(x)$.

3.4*. Докажите, что вариационная задача

$$Q(x) := \int_{-1}^1 t^2(x')^2 dt \to \inf,$$
$$x(-1) = -1,\ x(1) = 1,\ x \in C^1[-1,1]$$

не имеет решения. Найдите $\inf Q(x)$.

3.5. Пусть для функции $v \in C[a,b]$ выполняется условие

$$\int_a^b v(t)h(t)\,dt = 0 \quad \forall h \in C_0^1[a,b].$$

Докажите, что $v(t) \equiv 0$ на $[a,b]$.

3.6*. Как изменится заключение основной леммы вариационного исчисления, если условие

$$\int_a^b \big[u(t)h'(t) + v(t)h(t)\big]\,dt = 0$$

будет выполняться для тех $h \in C^1[a,b]$, у которых $h(a) = 0$ (не требуется, чтобы $h(b) = 0$)?

3.7. Пусть $u \in C[a,b]$ и выполнено условие

$$\int_a^b uh''\,dt = 0$$

для всех $h \in C^2[a,b]$, таких, что

$$h(a) = h'(a) = 0, \quad h(b) = h'(b) = 0.$$

Докажите, что $u(t) = c_0 t + c_1$.

3.8. Пусть условие предыдущей задачи выполнено для $h \in C^2[a,b]$, таких, что $h(a) = 0$, $h(b) = 0$. Докажите, что $u(t) \equiv 0$.

3.9*. Пусть функции u, v, w принадлежат $C[a,b]$ и

$$\int_a^b [uh'' + vh' + wh]dt = 0$$

для всех $h \in C^2[a,b]$, удовлетворяющих условиям

$$h(a) = h'(a) = 0, \quad h(b) = h'(b) = 0.$$

Докажите, что $u \in C^1[a,b]$, $u' - v \in C^1[a,b]$ и

$$(u' - v)' + w \equiv 0 \text{ на } [a,b].$$

3.10*. Докажите, что интегральный квадратичный функционал $Q(x)$ является выпуклым на множестве

$$\Omega = \big\{x \in C^1[a,b] \mid x(a) = A,\ x(b) = B\big\}$$

тогда и только тогда, когда его квадратичная форма $D(h)$ неотрицательно определена на множестве допустимых вариаций.

3.11. Пусть функции α и β принадлежат $C[a,b]$. Рассмотрим линейную вариационную задачу

$$J(x) := \int_a^b [\alpha x' + \beta x]dt \to \inf,$$
$$x(a) = A,\ x(b) = B, \quad x \in C^1[a,b].$$

Докажите, что у этой задачи либо $\inf J(x) = -\infty$, либо все планы являются оптимальными. Сформулируйте соответствующие условие в терминах функций α и β.

3.12. Решите вариационную задачу

$$Q(x) := \int_{-1}^{2} \left[(x')^2 + t^2 x'\right] dt \to \inf,$$
$$x(-1) = -1,\ x(2) = \tfrac{1}{2}, \quad x \in C^1[-1, 2].$$

3.13. Решите вариационную задачу

$$Q(x) := \int_{0}^{1} [2txx' + x^2] dt \to \inf,$$
$$x(0) = 0,\ x(1) = 1, \quad x \in C^1[0, 1].$$

3.14. Решите вариационную задачу

$$Q(x) := \int_{0}^{\pi/2} \left[(x')^2 - x^2 + 4x \cos t\right] dt \to \inf,$$
$$x(0) = x(\tfrac{\pi}{2}) = 0, \quad x \in C^1[0, \tfrac{\pi}{2}].$$

3.15. Пусть в квадратичной вариационной задаче $f(t) \equiv 0$. Предположим, что главное решение уравнения Якоби $h_0(t)$ положительно на (a, b) и $h_0(b) = 0$. Докажите, что
$$\inf Q(x) = -\infty,$$
если
$$Bp(b)h_0'(b) \neq Ap(a).$$

3.16*. Исследуйте в зависимости от параметра $\varepsilon > 0$ вариационную задачу

$$Q(x) := \int_{0}^{1} \left[\varepsilon (x')^2 - x^2\right] dt \to \inf,$$
$$x(0) = 0,\ x(1) = 1, \quad x \in C^1[0, 1].$$

3.17. Решите вариационную задачу

$$Q(x) := \int_0^1 \left[t^2(x')^2 + 12x^2\right] dt \to \inf,$$
$$x(0) = 0,\ x(1) = 1, \quad x \in C^1[0,1].$$

3.18*. Докажите, что вариационная задача

$$J(x) := \int_{-1}^1 x^2(1 - x')^2 dt \to \inf,$$
$$x(-1) = 0,\ x(1) = 1, \quad x \in C^1[-1,1]$$

не имеет решения. Найдите $\inf J(x)$.

Выясните, как нужно расширить основное пространство $C^1[-1,1]$, чтобы задача имела решение. Укажите это решение.

3.19. Докажите, что функция $x_0(t) \equiv 0$ является точкой строгого локального минимума в нелинейной вариационной задаче

$$J(x) := \int_0^1 (x')^2(1 - x^2) dt \to \inf,$$
$$x(0) = x(1) = 0, \quad x \in C^1[0,1].$$

Вместе в тем, $\inf J(x) = -\infty$.

3.20. Пусть x_0 — точка из естественной области определения нелинейного интегрального функционала $J(x)$. Докажите следующее утверждение: если второй дифференциал $d^2J(x_0; h)$ неотрицательно определён на множестве допустимых вариаций h, то

$$F''_{x'x'}\big(t, x_0(t), x_0'(t)\big) \geqslant 0 \text{ на } [a,b].$$

3.21. Найдите точку строгого локального минимума в вариационной задаче

$$J(x) := \int_0^1 \frac{dt}{x'} \to \inf,$$
$$x(0) = 0,\ x(1) = 1.$$

3.22. Рассмотрим вариационную задачу

$$J(x) := \int_0^1 x^2 (x')^2 dt \to \inf,$$
$$x(0) = 1,\ x(1) = \sqrt{2}, \quad x \in C^1[0,1].$$

1. Найдите точку строгого локального минимума.

2*. Докажите, что точка строгого локального минимума является единственной точкой глобального минимума.

3.23*. Рассмотрим вариационную задачу

$$J(x) := \int_0^1 \big[(x')^2 + p\cos x\big] dt \to \inf,$$
$$x(0) = x(1) = 0, \quad x \in C^1[0,1],$$

где $p > 0$ — параметр. Найдите супремум тех p, при которых кривая $x_0(t) \equiv 0$ является точкой строгого локального минимума.

3.24. Запишите уравнение Якоби для стационарной кривой задачи о минимальной поверхности вращения.

3.25. Обозначим через G единичный квадрат на плоскости, $G = [0,1] \times [0,1]$. Для функций $u = u(x,y)$, дважды непрерывно дифференцируемых на G, определим функционал

$$J(u) = \iint_G \big[(u'_x)^2 + (u'_y)^2\big] dx\, dy.$$

С помощью конечномерной аппроксимации выведите формулу для вариационной производной функционала $J(u)$.